ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

В. П. ГРИГОРЬЕВ, Ю. А. ДУБИНСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Допущено
Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебника для студентов образовательных учреждений
среднего профессионального образования, обучающихся
по группе специальностей 2200
«Информатика и вычислительная техника»

10-е издание, стереотипное

ACADEMA

Москва
Издательский центр «Академия»
2014

Многие из этих аксиом, согласуясь с нашей интуицией, кажутся настолько «естественными», что вызывают недоумение. Но для четко аргументированной теории они необходимы, все свойства действительных чисел должны вытекать из этих аксиом. Некоторые из этих аксиом наоборот, кажутся непонятными. Например, аксиома полноты, ее называют еще аксиомой непрерывности.

Целесообразность этой аксиомы легче понять, если проанализировать ее в действии. Для дальнейшего оказывается важной следующая теорема о так называемой верхней грани множества. Докажем эту теорему, опираясь на аксиому полноты, предварительно дав несколько определений.

Определение 1.2. Множество X называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует число M такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \le M$ $(x \ge M)$.

Определение 1.3. Множество X называется *ограниченным*, если оно является одновременно ограниченным снизу и ограниченным сверху.

Определение 1.4. Число M, фигурирующее в определении 1.2, называется *верхней* (*нижней*) *границей* множества X.

В некоторых книгах можно встретить термин: M — мажоранта (миноранта) множества X.

Определение 1.5. Наименьшая из верхних границ множества X называется *верхней гранью* (или *точной верхней границей*) множества X и обозначается $\sup X$ (читается «супремум X»).

Определение 1.6. Наибольшая из нижних границ множества X называется *нижней гранью* (или *точной нижней границей*) множества X и обозначается $\inf X$ (читается «инфимум X»).

Данные определения требуют уточнения: ведь не каждое числовое множество содержит наибольший и наименьший элемент. Например, множество $X = (0, 1]$ содержит наибольший элемент $x = 1$, но не содержит наименьшего элемента, так как $0 \notin X$. Этот вопрос решает следующая теорема.

Теорема. Если непустое числовое множество X ограничено сверху, то у него существует верхняя грань, т.е. $\sup X$, и притом единственная.

Доказательство. Докажем сначала единственность $\sup X$. Предположим противное: существуют две верхних грани $A = \sup X$ и $B = \sup X$. Тогда, по определению $\sup X$, так как A и B являются наименьшими верхними границами множества X, то $A \le B$ и $B \le A$. Это возможно только в случае, когда $A = B$, т.е. $\sup X$, если она существует, то она единственна.

Докажем теперь существование $\sup X$. Рассмотрим множество Y, элементами которого являются всевозможные верхние границы множества X. По условию теоремы X — непустое числовое множество так же, как и Y. Очевидно, что $X \le Y$.

В силу аксиомы полноты существует число β такое, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполняются неравенства $x \le \beta \le y$. По определению

$$b = \lim_{x \to a} f(x).$$

В логических символах это определение записывается в виде

$$b = \lim_{x \to a} f(x) : \{\forall x_n \to a (x_n \neq a) \Rightarrow f(x_n) \to b\}.$$

Предел имеет простой геометрический смысл, если обратиться к графику функции (рис. 5.9).

Он состоит в том, что при любом выборе последовательности $x_n \to a$ соответствующая последовательность $y_n \to b(y_n = f(x_n))$ на оси Oy. Это значит, что последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$, расположенных на графике функции $y = f(x)$, устремляется к точке (a, b).

Подчеркнем, что в самой точке $x = a$ функция $y = f(x)$ может быть не определена, что на графике отмечено стрелками и кружком с пустотой.

Замечание. Часто удобно пользоваться определением предела функции в следующей эквивалентной форме. Именно, $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если при любом выборе последовательности аргументов $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$ последовательность $b - f(x_n) \to 0$, т.е. бесконечно мала.

Пример 5.5. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Рассмотрим функцию $y = \dfrac{\sin x}{x}$. Эта функция определена всюду кроме точки $x = 0$. В самой же этой точке при подстановке $x = 0$ получается, как принято говорить, неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Поэтому найти предел функции $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ фактически означает раскрыть эту неопределенность.

Итак докажем, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, т.е. докажем, что для любой последовательности аргументов $x_n \to 0$ $(x_n \neq 0)$ соответствующая

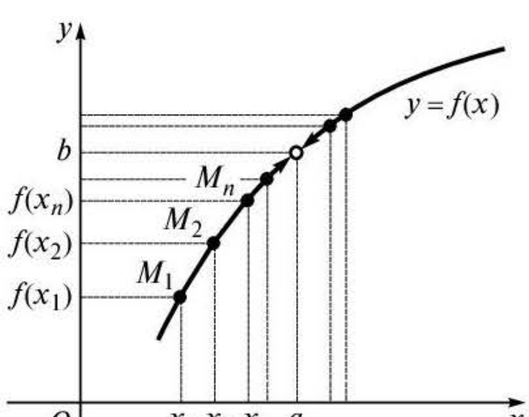


Рис. 5.9

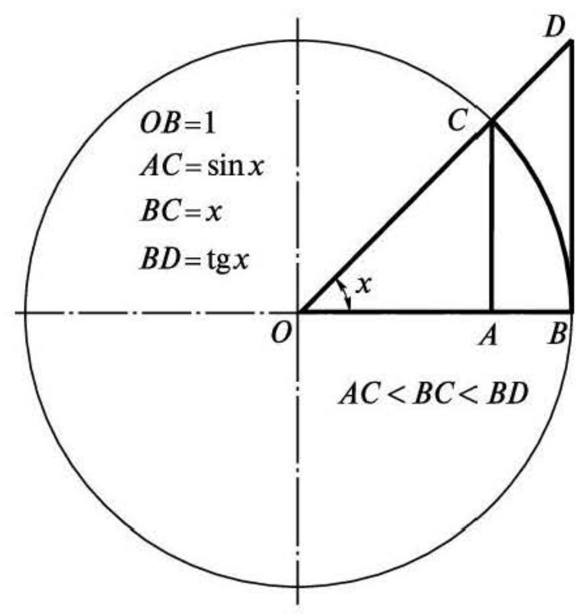


Рис. 5.10

последовательность $y_n \equiv \dfrac{\sin x_n}{x_n} \to 1$ при $n \to \infty$. С этой целью прежде всего заметим, что ввиду четности функции $\dfrac{\sin x}{x}$ достаточно ограничиться рассмотрением только положительных значений аргумента x. В таком случае воспользуемся известным двусторонним неравенством

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{5.1}$$

при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, выражающим геометрически тот факт, что радианная мера x угла, опирающегося на дугу окружности единичного радиуса ($OB = 1$), равна длине этой дуги ($x = \breve{BC}$) и, очевидно, больше катета $AC = \sin x$, но меньше катета $BD = \operatorname{tg} x$ (рис. 5.10).

Опираясь на неравенство (5.1), сравним теперь значения функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$ с 1 в процессе $x \to 0$. Так как $\sin x < x$, то

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x}. \tag{5.2}$$

С другой стороны, так как $x < \operatorname{tg} x$, то

$$1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 1 - \cos x.$$

Поскольку

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2},$$

то, вновь используя неравенство $\sin x < x$ ($x > 0$), получаем из (5.2), что

$$1 - \frac{\sin x}{x} < 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

С учетом неравенства (5.2) имеем

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Отсюда ясно, что какова бы ни была последовательность аргументов $x_n \to 0$, последовательность $1 - \dfrac{\sin x_n}{x_n}$ удовлетворяет двустороннему неравенству

$$0 < 1 - \frac{\sin x_n}{x_n} < \frac{x_n^2}{2},$$

т. е. зажата между двумя бесконечно малыми последовательностями, одна из которых тождественно равна нулю, а вторая равна $\frac{x_n^2}{2}$. Значит, и последовательность $\frac{\sin x_n}{x_n}$ является бесконечно малой (см. теорему 4.4), т. е. $1-\frac{\sin x_n}{x_n}\to 0$. Это значит, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. ▲

Этот, а также другие замечательные пределы приведем без доказательства в виде таблицы (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Таблица замечательных пределов

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$	9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$ (α — вещественный параметр)
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$	10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$	11. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{1}=1$	12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}=1$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{th} x}{x}=1$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$	

Таблица замечательных пределов используется для вычисления пределов на практике.

5.2.2. Основные свойства пределов функции

Основные свойства пределов функции изложим в виде следующих теорем.

Теорема 5.1. Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. Тогда для любого числа $\alpha\in\mathbf{R}^1$ функция $\alpha f(x)$ также имеет предел, причем $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x))=\alpha\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha b$.

Теорема 5.2. Пусть существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$.

Тогда:

1) функция $f(x) \pm g(x)$ также имеет предел при $x \to a$, причем

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = b \pm c,$$

т. е. предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов этих функций;

2) функция $f(x)g(x)$ также имеет предел, причем

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = b \cdot c,$$

т. е. предел произведения двух функций равен произведению пределов функций;

3) при дополнительном условии $c \neq 0$ функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ имеет предел, причем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c},$$

т. е. предел частного равен частному пределов.

Доказательство всех перечисленных утверждений проводится одинаково и является прямым следствием аналогичных свойств пределов числовых последовательностей, доказанных в 4.3.

Проведем доказательство, например, для случая 2 теоремы 5.2.

Доказательство. Действительно, пусть $x_n \to a$ ($x_n \neq a$) — произвольная последовательность аргументов, стремящихся к a. Тогда по условию $f(x_n) \to b$, а $g(x_n) \to c$. Следовательно, по теореме 4.6, произведение $f(x_n)g(x_n) \to bc$. Это значит, что существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, причем справедлива формула

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = bc. \blacktriangle$$

Пример 5.6. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 + \frac{\sin 2x}{x}\right).$$

Имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 + \frac{\sin 2x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 2$$

(здесь использован первый замечательный предел).

Пример 5.7. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x - 1}$. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x - 1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

(здесь вновь использованы замечательные пределы из табл. 5.1).

5.3. Бесконечно малые функции. Метод эквивалентных бесконечно малых величин

Определение 5.2. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$ (или в точке a), если она имеет предел при $x \to a$, причем этот предел равен нулю.

Кратко: $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to 0$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Например, функции x, $\sin x$, x^2, $1 - \cos x$ и другие являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Функция $\sin x$ является бесконечно малой и в процессе $x \to \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, поскольку

$$\lim_{x\to k\pi} \sin x = \sin k\pi = 0 \text{ при } k = \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Аналогично функция $1 - \cos x$ является бесконечно малой при $x \to 2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Ясно, что бесконечно малые функции могут стремиться к нулю по-разному или, как говорят, с разной скоростью. Поэтому бесконечно малые функции принято сравнивать между собой в зависимости от того, как ведет себя их отношение.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две бесконечно малые функции в процессе $x \to a$, причем $\beta(x) \neq 0$ при $x \neq a$.

Определение 5.3. Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка малости*, если существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, причем $A \neq 0$.

Пример 5.8. Сравним две бесконечно малые функции $\alpha(x) = 1 - \cos 2x$ и $\beta(x) = x^2$ при $x \to 0$.

Имеем

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{1-\cos 2x}{x^2} = 2\frac{\sin^2 x}{x^2} = 2\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{x},$$

откуда, используя первый замечательный предел, получаем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 2 \neq 0.$$

В соответствии с определением 5.3 это означает, что бесконечно малые x^2 и $1 - \cos 2x$ имеют один порядок малости.

Особенно важен случай $A = 1$, который постоянно используется при практическом нахождении пределов.

Определение 5.4. Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Примерами эквивалентных бесконечно малых функций (табл. 5.2) являются пары функций, приводящих к замечательным пределам (см. табл. 5.1).

Таблица 5.2

Таблица эквивалентных величин (всюду $x \to 0$)

1. $\sin x \sim x$	7. $a^{x-1} \sim x\ln a,\ a \neq 1, a > 0$
2. $\arcsin x \sim x$	8. $\log_a(1+x) \sim x/\ln a,\ a \neq 1,\ a > 0$
3. $\mathrm{tg}\, x \sim x$	9. $(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x,\ \alpha \in \mathbf{R}^1$
4. $\mathrm{arctg}\, x \sim x$	10. $1 - \cos x \sim x^2/2$
5. $e^x - 1 \sim x$	11. $\mathrm{sh}\, x \sim x$
6. $\ln(1+x) \sim x$	12. $\mathrm{th}\, x \sim x$

Примечание. Эквивалентность бесконечно малых величин обозначается, как обычно, знаком $\sim$.

Практическое значение таблицы эквивалентных величин определяется нижеследующей теоремой, дающей один из важнейших методов нахождения пределов вида

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \tag{5.3}$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$.

Теорема 5.3. Пусть $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$. Тогда существует и предел (5.3), причем справедлива формула

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Доказательство. Очевидно имеем

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \equiv \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\,\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\,\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}.$$

Тогда по теореме о пределе произведения (см. теорему 5.1)

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = 1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot 1 = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \ \blacktriangle$$

Пример 5.9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

Так как при $x \to 0$ $\sin 3x \sim 3x$, а $\sin 4x \sim 4x$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}.$$

Пример 5.10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{3x}}{\mathrm{tg}\, x}$.

Так как $\mathrm{tg}\, x \sim x$ в процессе $x \to 0$, то заменим вначале в знаменателе $\mathrm{tg}\, x$ эквивалентной ему величиной x. Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{3x}}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{3x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - (e^{3x} - 1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x} - 1}{x} = 1 - \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x} = -2$$

(в заключительных выкладках воспользовались тем, что $e^{3x} - 1 \sim 3x$ при $x \to 0$).

Пример 5.11. Найти предел $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\pi/2 - \operatorname{arctg} x)$.

Прежде всего заметим, что при $x \to +\infty$ функция $\operatorname{arctg} x \to \pi/2$, так что в данном примере имеем неопределенность типа $\infty \cdot 0$. Следовательно, для использования метода эквивалентных бесконечно малых величин надо преобразовать произведение $x(\pi/2 - \operatorname{arctg} x)$ к виду, приводящему к неопределенности $0/0$.

Это удобно сделать с помощью замены $t = (\pi/2 - \operatorname{arctg} x)$, при которой, очевидно, процесс $x \to +\infty$ заменяется процессом $t \to 0$. Далее $\operatorname{arctg} x = \pi/2 - t$, откуда $x = \operatorname{tg}(\pi/2 - t) = \operatorname{ctg} t$. Таким образом, получаем, что

$$\lim_{x\to +\infty} x(\pi/2 - \operatorname{arctg} x) = \lim_{t\to 0} t \operatorname{ctg} t = \lim_{t\to 0} t / \operatorname{tg} t = 1,$$

ибо $\operatorname{tg} t \sim t$ при $t \to 0$.

5.4. Непрерывные функции

До сих пор теория пределов функций $f(x)$ изучалась вне связи с их значениями $f(a)$ в предельной точке $x = a$. Это объясняется прежде всего тем (и мы это подчеркиваем!), что при определении предела используются только значения $f(x)$ при $x \neq a$, а в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена. Однако теория пределов имеет содержательный интерес и для функций, определенных в полной окрестности точки a, т.е. и в точке $x = a$. Именно для таких функций вводится понятие непрерывности.

5.4.1. Основные определения

Итак, пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, включая саму точку a.

Определение 5.5. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если она имеет предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и этот предел равен значению функции в точке a, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{5.4}$$

Говорят также, что в этом случае точка $x = a$ является точкой непрерывности функции $y = f(x)$.

Дадим эквивалентные определения непрерывности функции.

Обозначим $\alpha_a(x) \equiv f(x) - f(a)$. Ясно, что равенство (5.4) эквивалентно тому, что $\lim\limits_{x\to a}\alpha_a(x) = 0$ и понятие непрерывности $f(x)$ в точке a можно переформулировать следующим образом.

Определение 5.6. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a, если разность $\alpha_a(x) \equiv f(x) - f(a)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Можно сказать и иначе: функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a, если она (функция) представима в виде

$$f(x) = f(a) + \alpha_a(x), \tag{5.5}$$

где $\alpha_a(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$.

Замечание. С вычислительной точки зрения равенство (5.5) означает, что в точке x, близкой к точке a, значение непрерывной функции $f(x)$ приближенно равно ее значению $f(a)$, причем абсолютная погрешность приближения

$$\Delta \equiv |f(x) - f(a)| = |\alpha_a(x)| \to 0 \ (x \to a),$$

т.е. будет сколь угодно мала, если x достаточно близко к точке a.

Наконец, весьма удобно для практической работы определение непрерывности в терминах приращения функции. Именно, дадим точке a приращение Δa, т.е. перейдем от точки a к точке $x = a + \Delta a$. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x) - f(a)$, или, что то же, $\Delta y = f(a + \Delta a) - f(a)$.

Ясно, что непрерывность функции $y = f(x)$ в точке a означает, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta a \to 0$.

В таком варианте определения непрерывности обычно принято точку a заменять на произвольную фиксированную точку x.

Тогда $\Delta y \equiv f(x + \Delta x) - f(x)$, где Δx — приращение аргумента x и строгое определение непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x звучит следующим образом.

Определение 5.7. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x, если из условия $\Delta x \to 0$ следует, что и $\Delta y \to 0$.

Пример 5.12. Покажем, что в любой точке x вещественной оси функция $y = \sin x$ непрерывна. Действительно,

$$\Delta y \equiv \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Отсюда, используя неравенство $|\sin x| \le |x|$, $x \in \mathbf{R}^1$, имеем

$$|\Delta y| \le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right| = |\Delta x| \to 0$$

при $\Delta x \to 0$. Следовательно, в этом процессе и $\Delta y \to 0$. Это значит, что $y = \sin x$ — непрерывная функция в точке x. Так как x было выбрано произвольно, то непрерывность функции $\sin x$ на оси x установлена.

Аналогично доказывается, что и $\cos x$ — непрерывная функция на всей вещественной оси.

Пример 5.13. Покажем, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ непрерывна при любом $x \neq 0$, т.е. непрерывна всюду, где она определена.

В самом деле, если $x \neq 0$,

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x},$$

откуда при $\Delta x \to 0$ и

$$|\Delta y| = \frac{|\Delta x|}{|x + \Delta x||x|} \to \frac{0}{|x^2|} = 0.$$

Это и требовалось.

У читателя возникает естественный вопрос: каково положение с непрерывностью других элементарных функций — степенных, показательных, логарифмических и т.д. Ответом является следующее утверждение.

Утверждение. Элементарные функции непрерывны всюду, где они определены.

Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ определена всюду на вещественной оси, кроме точек $x_n = \pm\pi/2 + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. Таким образом, в любой точке $x \in R$, отличной от указанных точек x_n, функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна.

Однако элементарные функции встречаются в практических задачах не только «в чистом виде», но и в различных комбинациях, например, $y = \sin x + \cos x$, $y = e^x \cos x$, $y = x^2/\ln x$ и т.д.

Спрашивается, будут ли такие комбинации непрерывных функций также непрерывными функциями? Ответ положительный и вытекает из нижеследующих теорем.

5.4.2. «Арифметические» свойства непрерывных функций

Теорема 5.4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a. Тогда функция $cf(x)$, где c — любое число, также непрерывна в точке a.

Теорема 5.5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a. Тогда:

1) сумма или разность $f(x) \pm g(x)$ также непрерывны в точке a;

2) произведение $f(x)g(x)$ также непрерывно в точке a;

3) при дополнительном условии $g(a) \neq 0$ частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывно в точке a.

Доказательство. Все утверждения обеих теорем немедленно вытекают из аналогичных арифметических свойств пределов функций (см. 5.2). Установим, например, свойство 2. Действительно, из условия непрерывности $f(x)$ и $g(x)$ в точке a следует, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Тогда по теореме о пределе произведения

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = f(a)g(a).$$

Это значит, что произведение $f(x)g(x)$ непрерывно в точке a. ▲

Доказанные теоремы существенно расширяют множество известных нам непрерывных функций. Однако наиболее общей теоремой, позволяющей утверждать непрерывность произвольных композиций непрерывных функций, является теорема о непрерывности сложной функции.

5.4.3. Непрерывность сложной функции

Пусть $y = \varphi(x)$: $X \to Y$ — функция одной вещественной переменной с областью определения X и областью значений Y. Пусть далее имеется вторая функция $z = f(y)$: $Y \to \mathbf{R}^1$, определенная на области значений первой функции $y = \varphi(x)$ и принимающая вещественные значения.

Определение 5.8. Функция $z = f[\varphi(x)]$: $X \to \mathbf{R}^1$ называется *сложной функцией*, образованной функциями $y = \varphi(x)$ и $z = f(y)$.

Отметим, что сложная функция $z = f[\varphi(x)]$ является функцией переменного x с областью определения X. Геометрически сложная функция есть сквозное отображение $z \equiv z(x)$: $X \to \mathbf{R}^1$, образованное композицией отображений $y = \varphi(x)$: $X \to Y$ и $z = f(y)$: $Y \to \mathbf{R}^1$ (рис. 5.11).

Теорема 5.6 (о непрерывности сложной функции). Пусть функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x = a$, а функция $z = f(y)$ непрерывна (как функция переменной y) в точке $b = \varphi(a)$. Тогда сложная функция $z = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке $x = a$.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ — произвольная последовательность, сходящаяся к a. Покажем, что соответствующая числовая последовательность $f[\varphi(x_n)]$ сходится к $f[\varphi(a)]$ при $n \to \infty$.

Действительно, так как функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то $y_n \equiv \varphi(x_n) \to \varphi(a)$, т.е. $y_n \to b$, где $b = \varphi(a)$. Но тогда в силу непрерывности функции $f(y)$ в точке b будем иметь $f(y_n) \to f(b)$ или, что то же, $f[\varphi(x_n)] \to f[\varphi(a)]$. Это значит, что функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке $x = a$. ▲

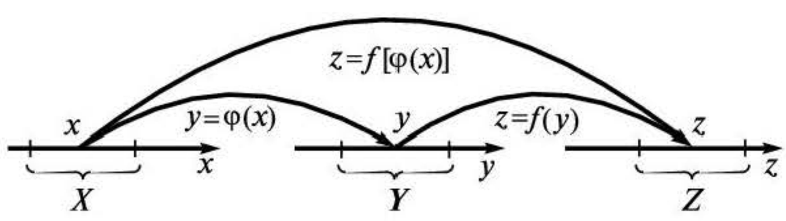


Рис. 5.11

верхней границы множества X, число β является таковым ($x \le \beta$). Вторая часть неравенства $\beta \le y$ показывает, что β является наименьшей из всех верхних границ множества X, т.е.

$$\beta = \sup X. \blacktriangle$$

Следствие. У непустого множества E, ограниченного снизу, существует и притом единственная нижняя грань $\inf E$.

Доказательство. Если множество E ограничено снизу, то множество G, состоящее из чисел $(-x)$, где $x \in E$, будет множеством, ограниченным сверху. Действительно, если число M ограничивает множество E снизу ($M \le x$), то число $(-M)$ ограничивает множество G сверху ($-x \le -M$). Поэтому, в силу теоремы, существует и притом единственная верхняя грань $\sup G$. Отсюда следует, что существует и притом единственная $\inf E = -\sup G$. $\blacktriangle$

Замечание. Сами числа $\sup X$ и $\inf X$ могут как принадлежать самому множеству X, так и не принадлежать. Например, если $X = (0, 1]$, то $\sup X = 1$, а $\inf X = 0$. В данном случае $\sup X \in X$, а $\inf X \notin X$. Для множества $Y = [0, 1)$, наоборот, $\sup Y \notin Y$, а $\inf Y \in Y$. Для множества $E = (0, 1)$ ни верхняя, ни нижняя грани не принадлежат множеству.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Пусть A и B — два подмножества множества C, т.е. $A \subset C$ и $B \subset C$. *Дополнением* подмножества A до множества C называется множество тех элементов множества C, которые не принадлежат множеству A. Обозначается это множество через $\overline{A}$. Аналогично определяется множество $\overline{B}$ — дополнение множества B. Разумеется, $\overline{A} \subset C$ и $\overline{B} \subset C$, т.е. и $\overline{A}$, и $\overline{B}$ являются подмножествами множества C.

Докажите равенство множеств $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

2. Пусть множество Ω — множество диагоналей в правильном шестиугольнике $ABCDEF$. Опишите множество Ω, перечислив все его элементы.

3. Докажите, что объединение двух счетных множеств является счетным множеством.

4. Известно, что если между элементами двух бесконечных множеств можно установить взаимно однозначное соответствие, то эти множества имеют одинаковую мощность. Докажите, что любые два конечных отрезка $[a, b]$ и $[c, d]$ ($a < b$, $c < d$), рассматриваемые как множества чисел x и y, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, имеют одинаковую мощность.

5. Пусть Ω — множество чисел отрезка $[-5, 2]$. Найдите $\sup \Omega$ и $\inf \Omega$.

6. Пусть Ω — множество чисел интервала $(1, 4)$. Найдите $\sup \Omega$ и $\inf \Omega$.

7. Пусть Ω — множество чисел вида $3 + (-1)^n + \dfrac{(-1)^n}{n}$, где $n \in \mathbf{N}$.

Найдите $\sup \Omega$ и $\inf \Omega$.

8. Пусть Ω — множество значений функции $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$. Докажите, что это множество ограничено.

Пример 5.14. Рассмотрим функцию $z = \ln \sin x$. Это сложная функция, так как она является композицией двух функций $y = \sin x$ и $z = \ln y$. Область определения этой функции — те значения, в которых $y = \sin x > 0$. Это есть набор интервалов $2\pi n < x < (2n+1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. По теореме 5.6 функция $z = \ln \sin x$ непрерывна на этом множестве.

Замечание. Ясно, что доказанная теорема имеет место и для сложных функций, являющихся композицией не только двух, но и трех и более непрерывных функций. В частности, можно утверждать, что любая композиция элементарных функций непрерывна всюду в своей области определения.

5.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

В предыдущем подразделе изучены свойства функций в отдельной точке $x = a$, при этом значения самих функций используются только в некоторой окрестности U_a (пусть даже весьма малой) этой точки. Такие свойства функции называются *локальными*, так как они не зависят от значений $f(x)$, удаленных от точки a.

В данном подразделе, напротив, исследованы те свойства непрерывных функций, которые определяются ее значениями в полной области определения, а именно на отрезке. Такие свойства называются *глобальными*, они характеризуют функцию в целом. К ним относятся: ограниченность функции, максимальные и минимальные значения и др.

5.5.1. Теорема о нуле непрерывной функции

Рассмотрим теорему о нуле непрерывной функции, играющей важную роль в численных методах.

Теорема 5.7. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, т.е. непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$;

2) в концевых точках отрезка $[a, b]$ $f(x)$ принимает значения разных знаков (например, $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$, или наоборот).

Тогда существует по крайней мере одна точка $\xi_0 \in (a, b)$ такая, что $f(\xi_0) = 0$ (рис. 5.12).

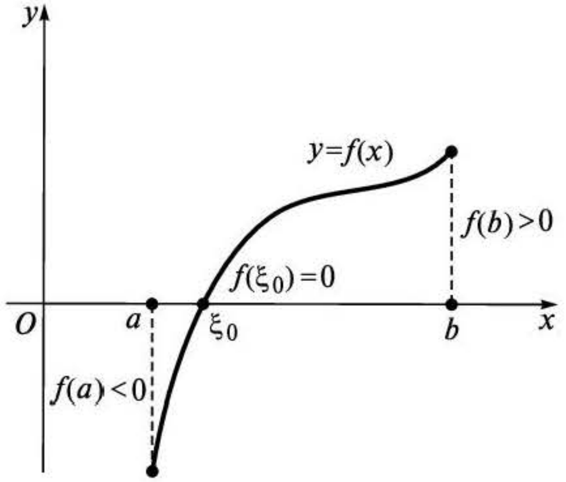


Рис. 5.12

Доказательство. Доказательство проведем известным методом деления отрезка пополам. Именно, обозначим через $\Delta_0 = [a_0, b_0]$ исходный отрезок $[a, b]$, т.е. $a_0 = a$, $b_0 = b$. По условию 2 $f(a_0) < 0$, а $f(b_0) > 0$. Разделим отрезок пополам точкой $c = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Возможны два варианта: либо $f(c) = 0$, либо $f(c) \neq 0$. В первом случае поиск точки ξ_0 закончен.

Во втором случае на концах хотя бы одной из половин, которую обозначим через $\Delta_1 = [a_1, b_1]$, функция $f(x)$ имеет разные знаки, причем $f(a_1) < 0$, а $f(b_1) > 0$.

Для отрезка $\Delta_1 = [a_1, b_1]$ проведем то же самое рассуждение. Тогда (отбросив тривиальный случай $f(c) = 0$) найдем отрезок $\Delta_2 = [a_2, b_2]$ (это одна из четвертей исходного отрезка Δ_0) такой, что $f(a_2) < 0$, а $f(b_2) > 0$. И так далее. На n-м шаге получим отрезок $\Delta_n = [a_n, b_n]$ длиной $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ такой, что $f(a_n) < 0$, а $f(b_n) > 0$.

В результате проведенного построения получаем последовательность вложенных отрезков $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \ldots$ или, что то же,

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \ldots,$$

обладающих двумя свойствами:

1) длина $\Delta_n = b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$;

2) $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Теперь поиск точки ξ_0, в которой $f(\xi_0) = 0$, завершают следующие рассуждения.

Очевидно, последовательность левых концов a_n есть монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность. Следовательно, по теореме о существовании предела монотонной ограниченной последовательности она сходится к некоторому пределу, который обозначим через ξ_a, т.е. $a_n \to \xi_a$. Точно так же последовательность правых концов b_n, будучи монотонно убывающей и ограниченной снизу, сходится к некоторому пределу ξ_b, т.е. $b_n \to \xi_b$. Ясно, что $\xi_a \le \xi_b$, но так как $b_n - a_n \to 0$, то на самом деле $\xi_a = \xi_b$. Обозначим их общее значение через ξ_0 и покажем, что это и есть искомая точка, т.е. корень уравнения $f(x) = 0$.

Действительно, так как $f(a_n) < 0$ для всех n, по теореме о переходе к пределу в неравенствах

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0. \tag{5.6}$$

Но по условию 1 функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и, в частности, непрерывна в точке ξ_0, к которой стремится последовательность a_n. Это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi_0)$ и, следовательно, в силу (5.6) $f(\xi_0) \le 0$. С другой стороны, так как $f(b_n) > 0$ и $b_n \to \xi_0$ при $n \to \infty$, то точно так же получаем, что $f(\xi_0) \ge 0$. Таким образом, получим $f(\xi_0) = 0$. ▲

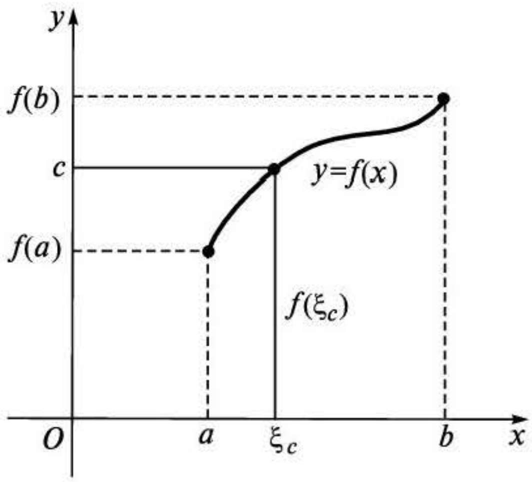


Рис. 5.13

Замечание. Отметим, что проведенный метод доказательства является реальным численным методом нахождения решений уравнения $f(x) = 0$. И хотя этот метод отнюдь не самый быстросходящийся, он сохраняет свое значение ввиду очевидной простоты алгоритма.

Следствием доказанной теоремы является теорема Коши о промежуточном значении непрерывной функции.

Теорема 5.8. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Пусть далее $f(x)$ принимает на концах различные значения, т.е. $f(a) \neq f(b)$. Тогда, каково бы ни было число c, промежуточное между $f(a)$ и $f(b)$, найдется хотя бы одно значение аргумента $x = \xi_c$, такое, что $f(\xi_c) = c$. (Иными словами, непрерывная функция $f(x)$ при изменении аргумента x от a до b принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$ хотя бы один раз (рис. 5.13).)

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - c$. Это, очевидно, непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Далее, так как число c промежуточно между $f(a)$ и $f(b)$, то значения $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ имеют разные знаки. Следовательно, согласно теореме 5.7, найдется точка $\xi_0 \in (a, b)$, в которой $\varphi(\xi_0) = 0$. Но это означает, что $f(\xi_0) = c$, т.е. ξ_0 и есть искомая точка ξ_c. ▲

5.5.2. Теоремы Вейерштрасса

Обратимся теперь к свойствам непрерывных функций, известных под общим названием первой и второй теорем Вейерштрасса.

Определение 5.9. Функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *ограниченной на этом отрезке*, если найдется число $M > 0$ такое, что для любого $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Теорема 5.9 (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Содержание этой теоремы геометрически проиллюстрировано на рис. 5.14 и означает, что график функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, обязательно располагается в ограниченной по y полосе $-M < y < M$, где M — некоторое число (разумеется, для каждой функции свое).

Подчеркнем, что на полуинтервале или интервале утверждение теоремы неверно. Примером может служить функция $y = \dfrac{1}{x}$, рас-

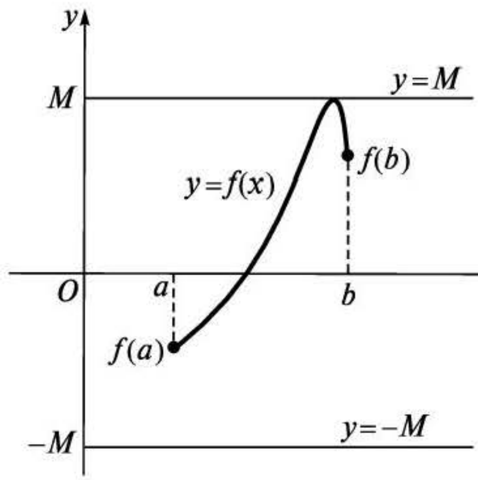


Рис. 5.14

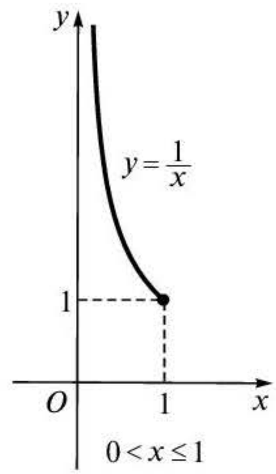


Рис. 5.15

смотренная на полуинтервале $(0, 1]$ (рис. 5.15). Эта функция непрерывна в каждой точке полуинтервала $(0, 1]$, но не является, очевидно, ограниченной на этом полуинтервале, так как $\frac{1}{x} \to \infty$ при $x \to 0$.

Определение 5.10. Значение $f(x_0)$, где $x_0 \in [a, b]$, называется *наибольшим значением функции* $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любой точки $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Таким образом, значение $f(x_0)$ является максимальным среди всех значений $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Поэтому часто точку x_0 обозначают как $x_{\max}$, а наибольшее значение как $f(x_{\max}) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Аналогично определяются точки $x_{\min}$ и $f(x_{\min})$.

Теорема 5.10 (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на этом отрезке как свое максимальное, так и свое минимальное значения.

Иначе говоря, какова бы ни была непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$, всегда найдутся точки $x_0 \in [a, b]$ и $x_1 \in [a, b]$ такие, что для всех точек x из отрезка $[a, b]$ справедливо двустороннее неравенство

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_0).$$

Это значит, что

$$x_0 = x_{\max}, \text{ а } f(x_0) = \max_{x \in [a,b]} f(x),$$

и точно так же

$$x_1 = x_{\min}, \text{ а } f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Ясно, что значение $f(x_{\max})$ ограничивает все значения функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, сверху, а $f(x_{\min})$ — снизу, причем эти границы точные (рис. 5.16).

Отметим, что и во второй теореме Вейерштрасса условие непрерывности функции $f(x)$ именно на отрезке существенно и за-

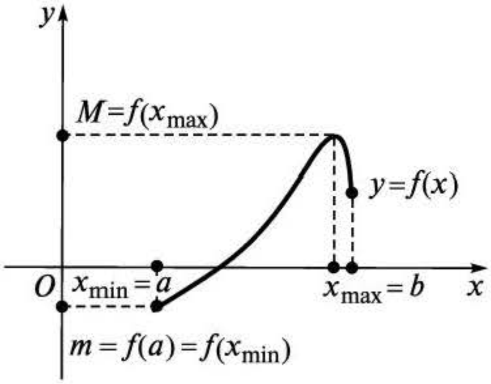


Рис. 5.16

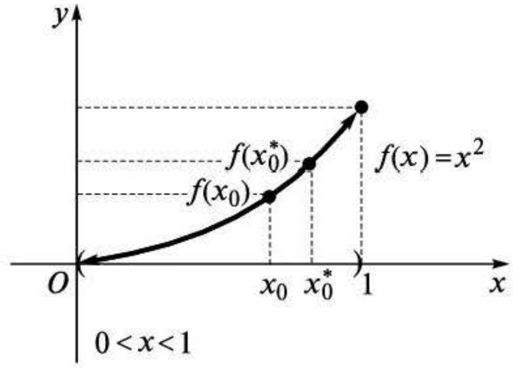


Рис. 5.17

менить отрезок интервалом или полуинтервалом нельзя. Например (рис. 5.17), функция $f(x) \equiv x^2$, рассмотренная на интервале $(0, 1)$, является непрерывной на этом интервале, но ни в одной точке $x_0 \in (0, 1)$ ее значение $f(x_0)$ не является максимальным среди всех ее значений. Действительно, для любой точки $x_0 < 1$ всегда найдется точка x_0^* такая, что $x_0 < x_0^* < 1$ и, следовательно, $f(x_0) < f(x_0^*)$.

В заключение приведем следствие из второй теоремы Вейерштрасса и теоремы Коши, которое будет использовано далее.

Следствие. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ и $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ — ее минимальное и максимальное значения. Тогда для любого числа c, удовлетворяющего неравенствам $m \le c \le M$, найдется по крайней мере одна точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $f(\xi) = c$.

Из этого следствия вытекает, что всякая функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает любое значение, промежуточное между своими минимумом и максимумом, хотя бы один раз.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Назовем число b_- левосторонним пределом (или пределом слева) функции $y = f(x)$ в точке a, если для любой последовательности $x_n \to a$, и такой, что $x_n < a$, последовательность значений $f(x_n) \to b$ при $n \to \infty$.

Обозначается предел слева символом $b_- = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$.

1. Определите аналогично правосторонний предел $b_+ = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

2. Докажите, что число b является пределом функции $f(x)$ при $x_n \to a$ (см. определение 5.1) тогда и только тогда, когда существует левосторонний и правосторонний пределы b_- и b_+, причем $b = b_- = b_+$, т. е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x).$$

2. Вычислите односторонние пределы при $x \to 0$ следующих функций:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{при } x < 0; \\ x^3, \text{при } x > 0; \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} e^x, \text{при } x < 0; \\ 0, \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Укажите на графиках этих функций числа b_- и b_+.

3. Пусть функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности U_a точки a, т.е. для всех точек x, принадлежащих окрестности U_a, справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq M,$$

где $M > 0$ — некоторая постоянная.

Докажите, что произведение $f(x)\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$, есть также бесконечно малая функция при $x \to a$.

Рассмотрите пример $\alpha(x) = x$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

4. Бесконечно малая функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с бесконечно малой функцией $\beta(x)$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Докажите, что две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\alpha_1(x)$ эквивалентны в том и только в том случае, если их разность $\gamma(x) = \alpha(x) - \alpha_1(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем каждая из них, т.е.

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 0, \ \lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\alpha_1(x)} = 0.$$

5. Установите, в каком отношении друг к другу находятся бесконечно малые функции

$$x^2, \sin x, 1 - \cos x, \ln(1 + 2x), \mathrm{e}^{2x} - 1$$

(всюду $x \to 0$): одного порядка, эквивалентны или разного порядка малости.

6. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то и функция $|f(x)|$ также непрерывна в точке $x = a$.

7. Вычислите пределы:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}, \quad \lim_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x + 2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}.$$

ГЛАВА 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. Производная функции. Основные правила дифференцирования

6.1.1. Определение. Таблица производных

Пусть $y = f(x)$ — функция вещественной переменной, определенная на некотором интервале (a, b). Рассмотрим отношение приращения функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

к приращению аргумента, т.е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{6.1}$$

Определение 6.1. Пусть существует конечный предел отношения (6.1) в процессе $\Delta x \to 0$. Тогда функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке $x \in (a, b)$, а сам предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке x.

Обозначается производная функции $y = f(x)$ либо y', либо $f'(x)$. Итак, кратко

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

или, что то же,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ясно, что в каждой конкретной точке $x \in (a, b)$ производная y' есть число, поэтому, если функция дифференцируема в каждой точке интервала (a, b), то ее производная является также функцией на интервале (a, b).

Пример 6.1. $y = c$, где c — постоянная. Ясно, что для постоянной функции $\Delta y \equiv 0$ при любом Δx. Следовательно $(c)' \equiv 0$, т.е. производная постоянной равна тождественно нулю.

Пример 6.2. Покажем, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ производная $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Действительно:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$
$$= x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n =$$
$$= nx^{x-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

Следовательно,

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}\right) = nx^{n-1}.$$

Это и требовалось.

Пример 6.3. Найдем производную функции $y = \sin x$.

Имеем

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{\Delta x}\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

откуда, используя свойство непрерывности функции $\cos x$ и первый замечательный предел, находим, что

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x.$$

Итак, $(\sin x)' = \cos x$.

Можно показать, что все элементарные функции дифференцируемы во всех точках, где они определены. Приведем формулы дифференцирования элементарных функций в виде таблицы (табл. 6.1).

При нахождении производных более сложных функций используется ряд правил, которые сформулируем в виде теорем.

Однако вначале докажем лемму, имеющую и самостоятельный интерес.

Лемма 6.1. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. По условию леммы существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x).$$

Это то же самое, что функция $\alpha(x, \Delta x) \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} - y'(x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, т.е. $\alpha(x, \Delta x) \to 0$.

Таблица 6.1

Таблица производных элементарных функций

1. $c' = 0$	11. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbf{R}^1$	12. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $(\sin x)' = \cos x$	15. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
6. $(\cos x)' = -\sin x$	16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	17. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	18. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
9. $(e^x)' = e^x$	19. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
10. $(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0$	20. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Легко видеть, что

$$\Delta y = y'(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x. \tag{6.2}$$

Поскольку x — фиксированная точка, то $y'(x)$ есть некоторое число, и, значит, при $\Delta x \to 0$ в правой части равенства (6.2) как первое, так и (тем более) второе слагаемое стремятся к нулю. Таким образом, при $\Delta x \to 0$ и приращение функции $\Delta y \to 0$. Это значит, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x. ▲

6.1.2. «Арифметические» свойства производной

Теорема 6.1. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция. Тогда при любой постоянной c функция $cf(x)$ — также дифференцируемая функция, при этом

$$(cf(x))' = cf'(x).$$

Теорема 6.2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемые функции.

Тогда:

1) сумма или разность $f(x) \pm g(x)$ также дифференцируемая функция, при этом

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

2) произведение $f(x)g(x)$ — также дифференцируемая функция, при этом

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

3) при дополнительном условии $g(x) \neq 0$ частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ также дифференцируемая функция, при этом

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Доказательства всех утверждений, приведенных в теоремах 6.1 и 6.2, проводятся по одной схеме. Остановимся для определенности на формуле для производной произведения функций.

Обозначим $y = f(x)g(x)$ и рассмотрим приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x).$$

Очевидно, Δy можно представить в виде

$$\Delta y = [f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x) + f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)].$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} g(x + \Delta x) + f(x)\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}.$$

Отсюда, учитывая, что по лемме 6.1 $g(x + \Delta x) \to g(x)$ при $\Delta x \to 0$, немедленно получим, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

т.е.

$$y' \equiv (fg)' = f'g + fg'. \ \blacktriangle$$

Приведенные правила дифференцирования существенно расширяют возможности практического нахождения производных. Однако наиболее мощным средством вычисления производных является правило дифференцирования сложных функций.

6.1.3. Производная сложной функции

Пусть $z = f(\varphi(x))$ — сложная функция, т.е. композиция двух функций $y = \varphi(x)$ и $z = f(y)$ (см. определение 5.8). Допустим, что функция $\varphi(x)$ имеет производную, которую обозначим через $\varphi'_x(x)$, а функция $f(y)$ имеет производную $f'_y(y)$. Спрашивается, будет ли иметь производную по x сложная функция $f(\varphi(x))$?

ГЛАВА 2
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Матрицы и действия над ними

В математике при решении ряда задач, например при решении систем линейных алгебраических уравнений, оказывается полезным такое понятие, как матрица. Под матрицей понимают таблицу прямоугольной формы, заполненную числами или символами, их обозначающими. Обозначают эти объекты большими латинскими буквами, а саму таблицу заключают в скобки — круглые, квадратные или другой формы. Например,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{Vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & x & y \end{Vmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Числа или символы, заполняющие таблицу, называются *элементами* матрицы. Множество элементов матрицы, расположенных в одной строке, естественно называть *строкой* матрицы. Аналогично понятие *столбца* матрицы. Если в матрице содержится m строк и n столбцов, то говорят, что матрица имеет размеры $m \times n$. Если $m = n$, то матрица называется квадратной, а если $m \neq n$, то — прямоугольной. Строки и столбцы удобно занумеровать: сверху вниз и слева направо соответственно. Тогда каждый элемент матрицы получает два номера: i — номер строки и j — номер столбца, в которых этот элемент расположен.

Если матрица заполнена символами, то их снабжают двойным индексом, например, a_{ij}. Первый индекс является номером строки, а второй — номером столбца, в которых расположен элемент матрицы. Так, матрица A с элементами a_{ij} может быть записана в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если из контекста ясно, каковы размеры матрицы, и важно обозначить только общий вид элемента матрицы, то матрицу зада-

Утвердительный ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема 6.3. Если функция $y = \varphi(x)$ дифференцируема по x, а функция $f(y)$ дифференцируема по y, то сложная функция $z = f(\varphi(x))$ дифференцируема по x, причем ее производная вычисляется по формуле

$$(f(\varphi(x))'_x = f'_y(\varphi(x))\varphi'_x(x)$$

или, что то же,

$$(f(\varphi(x)))'_x = f'_\varphi(\varphi(x))\varphi'_x(x). \tag{6.3}$$

Доказательство. Вывод формулы (6.3) приведем (ради простоты) при дополнительном условии строгой монотонности функции $y = \varphi(x)$.

С этой целью дадим x приращение Δx. Тогда функция $y = \varphi(x)$ получит приращение $\Delta y = \Delta\varphi(x)$, где $\Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$. Следом и функция $z = f(y)$ получит приращение $\Delta z = \Delta f(y)$, где $\Delta f(y) = f(y + \Delta y) - f(y) = f(\varphi(x + \Delta x)) - f(\varphi(x))$.

Заметим теперь, что в силу условия монотонности функции $y = \varphi(x)$, если $\Delta x \neq 0$, то и $\Delta y \neq 0$. (Кроме того, при $\Delta x \to 0$ и приращении $\Delta y \to 0$, см. лемму 6.1.) Следовательно, можно записать

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$$

или, что то же,

$$\frac{\Delta f(\varphi(x))}{\Delta x} = \frac{\Delta f(y)}{\Delta y}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}.$$

Отсюда, устремляя Δx к нулю, приходим к формуле

$$(f(\varphi(x))'_x = f'_y(y)\varphi'_x(x),$$

где, очевидно, $y = \varphi(x)$. Таким образом,

$$(f(\varphi(x)))'_x = f'_\varphi(\varphi(x))\varphi'_x(x). \blacktriangle$$

Пример 6.4. Приведем примеры использования доказанных правил дифференцирования:

а) $(\sqrt{x} + \ln x)' = (\sqrt{x})' + (\ln x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x};$

б) $(2^x \operatorname{tg} x)' = (2^x)' \operatorname{tg} x + 2^x (\operatorname{tg} x)' = 2^x \ln 2 \operatorname{tg} x + 2^x \dfrac{1}{\cos^2 x};$

в) $\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)' = \dfrac{(x^3)' \sin x - (\sin x)' x^3}{\sin^2 x} = \dfrac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x};$

г) $(\mathrm{e}^{x^2})' = (\mathrm{e}^{x^2})'_{x^2}(x^2)' = \mathrm{e}^{x^2} 2x;$

д) $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})' = (\operatorname{arctg}\sqrt{x})'_{\sqrt{x}}(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{1 + (\sqrt{x})^2}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{1 + x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

6.1.4. Геометрический смысл производной

В заключение остановимся на геометрическом смысле производной $f'(x)$ в фиксированной точке $x = a$. Для этого рассмотрим задачу о проведении касательной прямой к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_a(a, f(a))$. Дадим значению a приращение Δa и проведем секущую $T_{M_a M_{a+\Delta a}}$ через точки $M_a(a, f(a))$ и $M_{a+\Delta a}(a + \Delta a, f(a + \Delta a))$ (рис. 6.1).

Как известно, уравнение прямой $T_{M_a M_{a+\Delta a}}$ имеет вид

$$y - f(a) = k_{a,\, a+\Delta a}(x - a), \tag{6.4}$$

где $k_{a,\, a+\Delta a}$ — *угловой коэффициент* секущей. Очевидно,

$$k_{a,a+\Delta a} = \frac{\Delta y}{\Delta a} = \frac{f(a+\Delta a) - f(a)}{\Delta a}.$$

Устремим теперь $\Delta a \to 0$. Тогда точка $M_{a+\Delta a}$, скользя по графику функции $y = f(x)$, будет стремиться к точке M_a, а секущая $T_{M_a M_{a+\Delta a}}$ — к некоторой предельной прямой T_{M_a}, которую естественно называть *касательной* прямой к графику функции $y = f(x)$ в точке M_a. Переходя к пределу при $\Delta a \to 0$ в уравнении (6.4), получим уравнение касательной прямой T_{M_a}. Именно, при $\Delta a \to 0$ угловой коэффициент секущей

$$k_{a,a+\Delta a} = \frac{f(a+\Delta a) - f(a)}{\Delta a} \to f'(a),$$

поэтому уравнением касательной T_{M_a} будет уравнение

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через точку $M_a(a, f(a))$ с угловым коэффициентом $k_{M_a} = f'(a)$.

В итоге получаем, что значение производной $f'(a)$ является угловым коэффициентом касательной прямой, проведенной в точке $M_a(a, f(a))$ к графику функции $y = f(x)$.

В этом и состоит геометрический смысл производной.

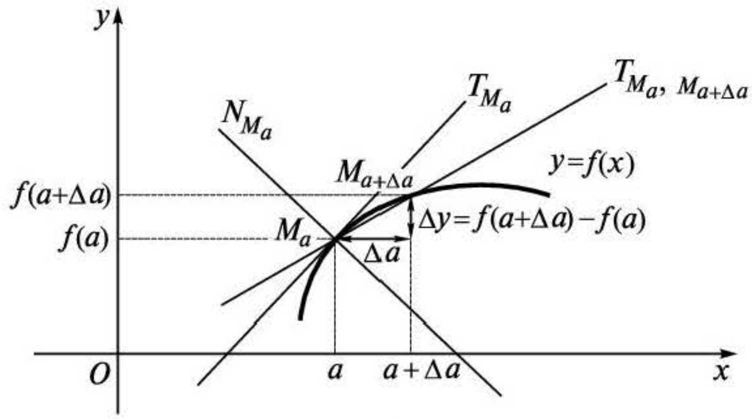


Рис. 6.1

Замечание. Как известно из аналитической геометрии, прямая N_{M_a}, перпендикулярная к T_{M_a}, имеет угловой коэффициент $k_{N_a} = -\dfrac{1}{k_{M_a}}$, т.е. $k_{N_a} = -\dfrac{1}{f'(a)}$, и, следовательно, ее уравнение есть

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \tag{6.5}$$

(разумеется, мы должны предположить, что $f'(a) \neq 0$).

Прямая N_{M_a} называется *нормалью*, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_a, а уравнение (6.5) — уравнением нормали.

6.2. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Теоремами о среднем для дифференцируемых функций называются теоремы, в которых значения функций на концах отрезка $[a, b]$ связываются с производными этих функций в некоторых средних точках интервала (a, b).

Предварительно, однако, установим лемму Ферма, которая известна как необходимое условие локального экстремума функции и будет изложена ниже (теория экстремума функций будет приведена в 6.7).

Определение 6.2. Скажем, что функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = a$ локальный максимум, если найдется окрестность U_a этой точки (хотя бы и малая), такая, что для любой точки $x \in U_a$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(a)$.

Аналогично определяется локальный минимум.

Геометрическая иллюстрация этого определения приведена на рис. 6.2.

Отметим, что точка $x = a$, в которой имеется локальный максимум, не обязательно является точкой, где функция достигает наи-

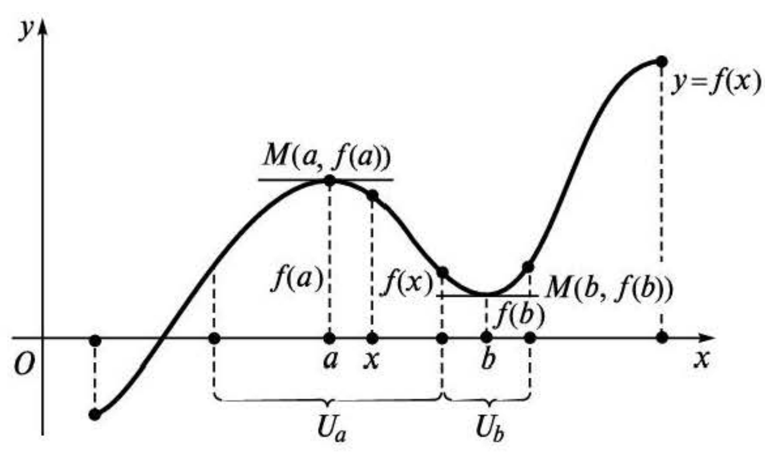


Рис. 6.2

большего значения, поэтому при исследовании функции на отрезке $[a, b]$ (например, при построении ее графика) следует различать точки, в которых достигается локальный максимум (или минимум) функции, и точки, где значение этой функции на отрезке $[a, b]$ максимально (минимально). (Отсюда происходит и название «локальный» максимум, т.е. вблизи точки a.)

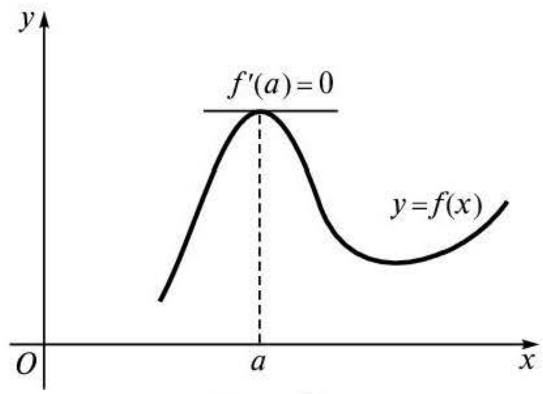


Рис. 6.3

Лемма 6.2 (лемма Ферма). Пусть в некоторой точке $x = a$ функция $y = f(x)$ имеет локальный максимум (минимум) и дифференцируема в этой точке. Тогда

$$f'(a) = 0.$$

Иначе говоря, в точках локального максимума и минимума производная функции $y = f(x)$ обязательно равна нулю.

Геометрически утверждение Ферма вполне прозрачно, если учесть, что значение $f'(a)$ есть угловой коэффициент касательной прямой к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(a, f(a))$. Именно в точке локального максимума или минимума касательная к графику функции горизонтальна (рис. 6.3).

Доказательство. По определению

$$f(a) \equiv \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta a}, \tag{6.6}$$

где Δa — приращение аргумента при переходе от точки $x = a$ к точке $x = a + \Delta a$, а $\Delta f(a) = f(a + \Delta a) - f(a)$ — соответствующее приращение функции. Отметим при этом, что Δa может стремиться к нулю любым способом, т.е. формула (6.6) справедлива при том, что $\Delta a \to 0$ по любому закону. Этим и воспользуемся для доказательства того, что в точке локального максимума $f'(a) = 0$. Устремим вначале $\Delta a \to 0$, оставляя его положительным, т.е. $\Delta a > 0$. Тогда отношение

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta a} \le 0,$$

ибо вблизи точек локального максимума всегда $f(a + \Delta a) \le f(a)$ и, следовательно, $\Delta f(a) \le 0$. Но в таком случае (теорема о переходе к пределу в неравенствах)

$$f'(a) = \lim_{\Delta a \to +0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta a} \le 0. \tag{6.7}$$

Теперь устремим $\Delta a \to 0$, оставляя его отрицательным, т.е. $\Delta a < 0$.

Тогда

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta a} \geq 0$$

и, следовательно,

$$f'(a) = \lim_{\Delta a \to -0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta a} \leq 0. \tag{6.8}$$

Очевидно, неравенства (6.7) и (6.8) совместимы, если только

$$f'(a) = 0. \ \blacktriangle$$

Обратимся теперь непосредственно к теоремам о среднем.

Теорема 6.4 (теорема Ролля о нуле производной). Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) $f(x)$ дифференцируема по крайней мере на интервале (a, b);
3) $f(a) = f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля таков же, что и леммы Ферма: в условиях теоремы найдется внутри отрезка $[a, b]$ хотя бы одна точка ξ, для которой касательная прямая к графику функции горизонтальна (рис. 6.4).

Строгое доказательство, которое в деталях не приводим, опирается на лемму Ферма. Именно, логически возможны два случая:

1) $f(x) \equiv c$, где c — постоянная, и, напротив, 2) $f(x) \neq c$ на отрезке $[a, b]$ тождественно.

В первом случае очевидно, $f'(x) \equiv 0$ на $[a, b]$ и в качестве точки ξ можно взять любую точку из интервала (a, b).

Во втором случае в силу условия $f(a) = f(b)$ найдется хотя бы одна внутренняя точка $x = \xi$ локального максимума или минимума функции $y = f(x)$. По лемме Ферма, в этой точке $f'(\xi) = 0$. Таким образом, ξ — искомая точка.

Теорема 6.5 (теорема Лагранжа о среднем значении). Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет условиям:

1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) $f(x)$ дифференцируема по крайней мере на интервале (a, b).

Тогда найдется хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{6.9}$$

Доказательство. Геометрический смысл формулы (6.9) виден из рис. 6.5.

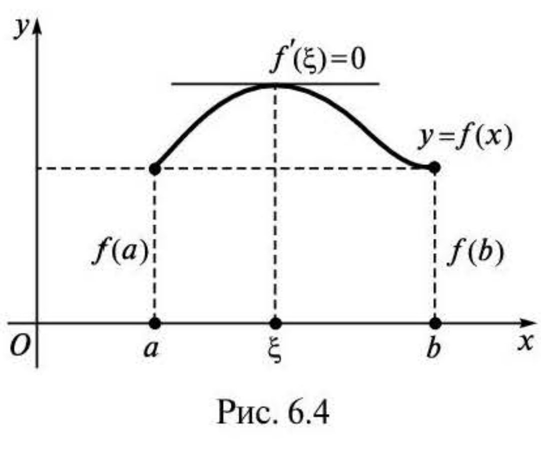


Рис. 6.4

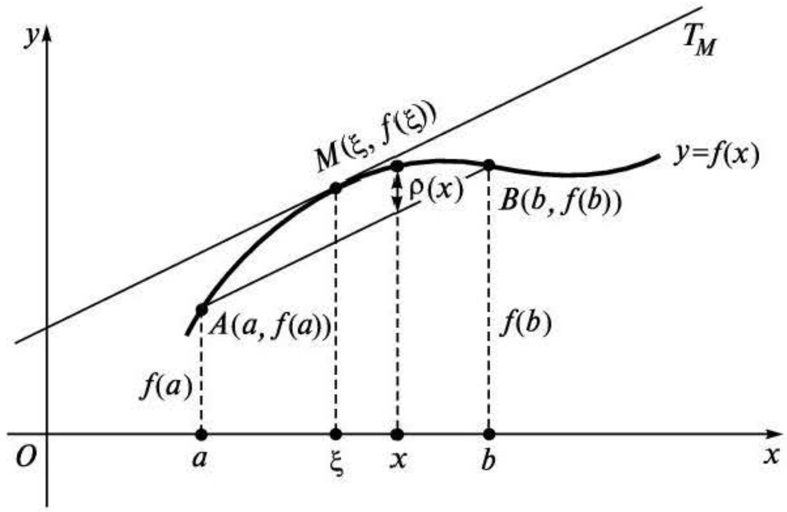


Рис. 6.5

Ясно, что правая часть формулы (6.9) есть угловой коэффициент хорды AB. Вспоминая, что значение $f'(\xi)$ равно угловому коэффициенту касательной T_M, приходим к выводу: в условиях теоремы всегда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что касательная T_M к графику функции $y = f(x)$ параллельна хорде AB.

Утверждение теоремы Лагранжа легко вытекает из теоремы Ролля. Действительно, рассмотрим вспомогательную функцию

$$\rho(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right],$$

где $\rho(x)$ — «расстояние» между графиком функции $y = f(x)$ и графиком хорды

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Очевидно, что $\rho(a) = \rho(b) = 0$. Следовательно, по теореме Ролля, существует точка $\xi \in (a, b)$, в которой $\rho'(\xi) = 0$. Так как

$$\rho'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

то равенство $\rho'(\xi) = 0$ и означает, что

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacktriangle$$

Замечание. Очевидно, формулу (6.9) можно записать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \qquad (6.10)$$

Именно в таком виде она чаще всего и применяется.

В заключение сформулируем наиболее общую теорему Коши.

Теорема 6.6 (теорема Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяют условиям:

1) $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$;

2) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы по меньшей мере на интервале (a, b);

3) $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b).

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Замечание. Читатель, наверное, заметил, что все три теоремы о среднем носят характер так называемых теорем существования: в них утверждается существование точек $\xi \in (a, b)$, для которых имеют место соответствующие равенства, но ничего не предлагается для их конструктивного нахождения. Тем не менее и при таком «недостатке» теоремы о среднем находят самые разные применения. В следующем подразделе исследуем свойства монотонности функции и установим знаменитое правило Лопиталя с помощью этих теорем.

6.3. Следствия из теорем о среднем (монотонность, правило Лопиталя)

6.3.1. Критерий монотонности

Исследуем вначале свойство монотонности функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$ [или на интервале (a, b)].

Определение 6.3. Функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей* на множестве E, если для любых точек x_1 и x_2 этого множества из условия $x_1 \leq x_2$ следует, что и $f(x_1) \leq f(x_2)$. В случае строгих неравенств $x_1 < x_2$ и $f(x_1) < f(x_2)$, функция называется *строго монотонной*.

Аналогично определяются монотонно убывающие и строго монотонно убывающие функции.

В дальнейшем в качестве E будем выбирать отрезок или интервал.

Пример 6.5. Функция $y = e^x$ строго монотонно возрастает на всей вещественной оси (см. рис. 5.5).

Пример 6.6. Функция $y = \arccos x$ монотонно убывает на отрезке $[-1, 1]$ (см. рис. 5.4).

Пример 6.7. Функция $y = |x|$ (см. рис. 6.8) монотонно убывает на полуоси $(-\infty, 0]$ и, напротив, монотонно возрастает на полуоси $[0, +\infty)$.

Участки монотонности функции $f(x)$ однозначно определяются знаком производной $f'(x)$, что следует из следующей теоремы.

Теорема 6.7 (критерий монотонности). Дифференцируемая функция монотонно возрастает на интервале (a, b) в том и только в том случае, когда $f'(x) \geq 0$ в любой точке этого интервала.

Доказательство. Пусть $f'(x) \geq 0$ на интервале (a, b). Покажем, что для любых точек $x_1 \leq x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ или, что то же, $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$.

Действительно, применяя теорему о среднем Лагранжа [см. формулу (6.10)] на отрезке $[x_1, x_2]$, получаем, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 \leq x_1), \tag{6.11}$$

где $\xi \in (x_1, x_2)$ — некоторая средняя точка.

Поскольку по условию $f'(x) \geq 0$ в любой точке $x \in (a, b)$, то и в точке ξ значение $f'(\xi) \geq 0$. Отсюда немедленно следует, что правая часть формулы (6.11) неотрицательна. Следовательно, и левая часть $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. ▲

Напротив, пусть $f(x)$ монотонно возрастает. Покажем, что в любой точке $x \in (a, b)$ производная $f'(x) \geq 0$.

Действительно, дадим x приращение Δx и рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{6.12}$$

Так как функция монотонно возрастает, то $f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$ при $\Delta x > 0$ и, наоборот, $f(x + \Delta x) - f(x) \leq 0$ при $\Delta x < 0$. Следовательно, во всех случаях

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, немедленно получаем, что и

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0. \ ▲$$

6.3.2. Правило Лопиталя

Под правилом Лопиталя понимается прием раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, использующий производные функций, находящихся в числителе и знаменателе этих неопределенностей. Более точно, пусть, например, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции в процессе $x \to a$. Рассмотрим вопрос о нахождении предела $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, который, очевидно, отвечает неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Теорема 6.8 (правило Лопиталя). Допустим, что выполнены следующие два условия:

1) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности U_a точки a, исключая, быть может, саму точку a;

2) существует предел отношения производных $\alpha'(x)$ и $\beta'(x)$, т.е. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$.

Тогда существует и предел отношения самих функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}=\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}. \tag{6.13}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что по условию 1 функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ дифференцируемы при $x \neq a$, а значит, согласно лемме 6.1, и непрерывны при $x \neq a$.

Доопределим функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ нулем в точке $x = a$, т.е. будем считать, что $\alpha(a) = 0$, $\beta(a) = 0$. Так как $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$ при $x \to a$, то доопределенные таким образом функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ становятся непрерывными и в точке $x = a$, т.е. в полной окрестности U_a.

Теперь, опираясь на теорему о среднем Коши, можно установить формулу (6.13). Имеем при $x \neq a$

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{\alpha(x)-\alpha(a)}{\beta(x)-\beta(a)}=\frac{\alpha'(\xi)}{\beta'(\xi)},$$

где $\xi \in (a,x)$ — некоторая средняя точка. Ясно, что при $x \to a$ и $\xi \to a$. В силу условия 2 предел правой части при $\xi \to a$ существует. Следовательно, существует и предел левой части, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{\alpha'(\xi)}{\beta'(\xi)}$$

или, что то же,

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}. \ \blacktriangle$$

Замечание. Теорема 6.8 устанавливает правило Лопиталя для случая неопределенности $\frac{0}{0}$ в процессе $x \to a$, где a — конечная точка. Можно показать, что правило Лопиталя справедливо и для случая неопределенности $\frac{0}{0}$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Оно верно и для неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ как при $x \to a$, так и при $x \to \pm\infty$.

Пример 6.8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

Очевидно, здесь $\alpha(x) = \sin x - x$, $\beta(x) = x^3$ — бесконечно малые дифференцируемые функции при $x \to 0$. Следовательно, по правилу Лопиталя,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{3x^2}=\frac{-1}{6}$$

(здесь использована «эквивалентность» $1 - \cos x \sim x^2/2$).

Пример 6.9. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0,$$

так как $e^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$ (здесь применено правило Лопиталя дважды).

Пример 6.10. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$.

Заметим, что при $x > 0$ и $x \to 0$ функция $\ln x \to -\infty$, поэтому данный предел имеет неопределенность типа $0\cdot\infty$ и о формальном применении правила Лопиталя речи нет. Однако эта неопределенность легко сводится к неопределенности типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, к которой правило Лопиталя уже применимо.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}(x\ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0}x=0.$$

Пример 6.11. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(1+x))^2}{x}$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(1+x))^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(1+x)\dfrac{1}{1+x}}{1}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0$$

(здесь вновь дважды применено правило Лопиталя).

В заключение приведем в виде леммы утверждение, которое понадобится нам в следующей главе.

Лемма 6.3. Пусть $f'(x) = 0$ на интервале (a, b). Тогда функция $f(x)$ является постоянной на этом интервале, т.е.

$$f(x) = C,\ x \in (a, b),$$

где C — постоянная.

Доказательство. Действительно, выберем на интервале (a, b) какие угодно точки x_1 и x_2. Тогда по теореме о среднем Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

где $\xi \in (x_1, x_2)$ — некоторая «средняя» точка, находящаяся между x_1 и x_2. По условию $f'(x) = 0$ в любой точке интервала (a, b) и, в частности, $f'(\xi) = 0$. Это означает тогда, что

$$f(x_1) = f(x_2). \tag{6.14}$$

Так как выбранные точки x_1 и x_2 — любые, то равенство (6.14) говорит о том, что на интервале (a, b) все значения функции $f(x)$

ют в более компактной форме: $A = \|a_{ij}\|$, по умолчанию полагая, что i и j изменяются в пределах: $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. В дальнейшем будем записывать матрицу в развернутом виде, используя круглые скобки, а для краткой записи — двойные прямые скобки, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ или } A = \|a_{ij}\|.$$

Определим основные действия с матрицами. Для этого прежде всего необходимо ответить на вопрос: что означает равенство двух матриц между собой.

Определение 2.1. Матрицы A и B называются *равными*, если они имеют одинаковые размеры и элементы, стоящие на одинаковых местах, равны между собой.

Определение 2.2. *Суммой* двух матриц $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = \|c_{ij}\|$ тех же размеров, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B:

$C = A + B$ означает, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех i и j ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$).

Операция нахождения суммы двух матриц называется *сложением* матриц.

Пример 2.1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

При сложении матриц роль нуля при сложении чисел играет нулевая матрица $O = \|0\|$ соответствующего размера, т.е. матрица, все элементы которой равны нулю. Действительно, для любой матрицы A имеет место равенство $A + O = A$.

Нетрудно доказать, что операция сложения матриц обладает всеми свойствами, присущими операции сложения чисел:

1) $A + B = B + A$ — коммутативность сложения;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ — ассоциативность сложения;

3) для любой матрицы A найдется единственная матрица B такая, что $A + B = O$.

Очевидно, что если $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$, то $b_{ij} = -a_{ij}$ для всех i и j.

В обоснование приведенных свойств операции сложения матриц заметим, что операция сложения матриц сводится к обычному сложению чисел для элементов матриц. Для обычных чисел эти свойства имеют место. Поэтому, согласно определению 2.2, свойства 1—3 могут быть легко выведены. Например, возьмем свойство 1. Имеем:

$$A + B = \|a_{ij} + b_{ij}\| = \|b_{ij} + a_{ij}\| = B + A. \ \blacktriangle$$

совпадают друг с другом. Это возможно лишь в том случае, если $f(x)$ постоянна на этом интервале, т.е. $f(x)$ — некоторая константа. ▲

Замечание. Поскольку для любой постоянной функции $f(x) = C$, очевидно, $f'(x) = 0$ на (a, b), то в результате получили утверждение: функция $f(x)$ постоянна на интервале (a, b) в том и только в том случае, если ее производная тождественно равна нулю.

6.4. Первый дифференциал функции, связь с приращением функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке x, в которой она определена. Такую функцию мы назвали дифференцируемой.

Определение 6.4. Выражение

$$dy = f'(x)\Delta x$$

или, что то же,

$$df(x) = f'(x)\Delta x$$

называется *первым дифференциалом функции* $y = f(x)$ в точке x.

Пример 6.12. а) $y = x^n$, тогда $dy = nx^{n-1}\Delta x$;

б) $y = \operatorname{tg} 2x$, тогда $dy = \dfrac{2}{\cos^2 2x}\Delta x$.

Как видно, дифференциал функции $y = f(x)$ зависит не только от точки x, в которой он вычисляется, но и от приращения аргумента Δx. Важно отметить, что первый дифференциал зависит от Δx линейно (этого, конечно, не скажешь относительно его зависимости от x).

Если вспомнить, что значение производной $f'(x)$ равно угловому коэффициенту касательной T_{M_x} (см. рис. 6.1), то становится ясен и геометрический смысл дифференциала. Именно, значение дифференциала dy в заданной точке x при выбранном приращении Δx равно приращению ординаты касательной T_{M_x} при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$ (рис. 6.6).

Интересно сравнить значения дифференциала dy и полного приращения функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Из рисунка видно, что при малых значениях Δx приращение функции Δy и дифференциала dy весьма мало отличаются друг от друга, что наводит на мысль о том, что вблизи x полное приращение функции и ее полный дифференциал приближенно равны. Точно эта близость выражается следующей теоремой.

Теорема 6.9. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда справедлива формула

$$\Delta y = dy + \alpha(x, \Delta x)\Delta x,$$

где величина $\alpha(x, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Доказательство (фактически оно уже было проведено при обосновании леммы 5.1). Действительно, дифференцируемость функции $y = f(x)$ в точке x означает, что существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

В соответствии с определением предела это значит, что разность

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \equiv \alpha(x, \Delta x)$$

есть бесконечно малая величина в процессе $\Delta x \to 0$.

Отсюда и получаем, что

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x,$$

т. е.

$$\Delta y = dy + \alpha(x, \Delta x)\Delta x. \ \blacktriangle \tag{6.15}$$

Анализ формулы (6.15) позволяет сделать выводы о том, что приращение функции Δy приближенно равно ее дифференциалу dy, при этом абсолютная погрешность приближения определяется бесконечно малой величиной $\alpha(x, \Delta x)\Delta x$. Эта погрешность есть произведение двух бесконечно малых величин $\alpha(x, \Delta x)$ и Δx и ее обозначают $o(\Delta x)$ (читается «о» малое от Δx), подчеркивая, что $o(\Delta x) \equiv \alpha(x, \Delta x)\Delta x$ стремится к нулю быстрее, чем Δx в том смысле, что имеет более высокий порядок малости, чем Δx. Поэтому формула (6.15) часто представляется в виде

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \tag{6.16}$$

а дифференциал $dy = f'(x)\Delta x$ называется *главной линейной частью* полного приращения функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

В заключение покажем, как применяется формула (6.16) для вычисления приближенных значений функций.

Пусть x_0 — фиксированная точка, $x = x_0 + \Delta x_0$ — значения аргумента, близкие к x_0 (рис. 6.7).

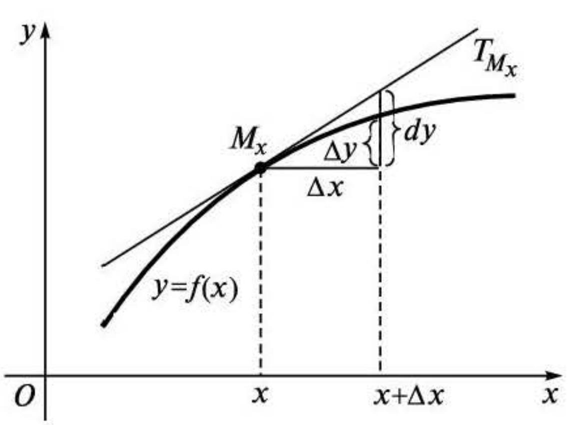


Рис. 6.6

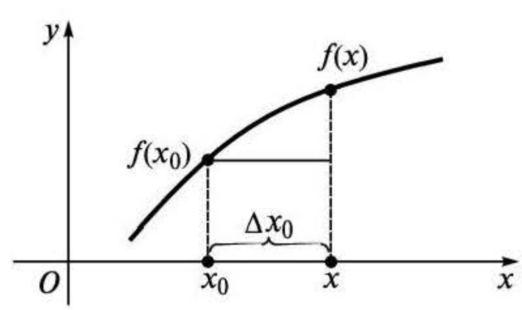


Рис. 6.7

Допустим, что в точке x_0 известны значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$. Тогда, согласно (6.16),

$$f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x_0 + o(\Delta x_0)$$

или, что то же,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Следовательно, можно считать, что

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{6.17}$$

при этом значение $f(x)$ будет найдено тем точнее, чем меньше разность аргументов $x - x_0$.

Пример 6.13. Вычислим значения функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точках $x = 1{,}2$; $x = 1{,}1$; $x = 1{,}05$.

Решение. Так как данные точки близки к единице, то положим $x_0 = 1$ и воспользуемся приближенной формулой (6.17).

Имеем

$$f(x_0) = 1, \; f'(x_0) = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, получаем приближенную формулу

$$\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x - 1),$$

откуда при $x = 1{,}2$; $x = 1{,}1$; $x = 1{,}05$ будем последовательно иметь

$$\sqrt{1{,}2} \approx 1{,}100; \;\; \sqrt{1{,}1} \approx 1{,}050; \;\; \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}025.$$

Можно показать, что абсолютные погрешности соответствующих вычислений равны $\Delta_1 = 0{,}010$; $\Delta_2 = 0{,}002$; $\Delta_3 = 0{,}001$. Как видно, эти погрешности монотонно убывают.

6.5. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая функция на интервале (a, b). Тогда производная $y' = f'(x)$ является функцией, определенной также на интервале (a, b), и, следовательно, можно поставить вопрос о существовании производной от производной исходной функции. Она называется *второй производной* от функции $y = f(x)$. Далее естественно возникает третья производная, четвертая и т.д.

Определение 6.5. Пусть $n = 2, 3, \ldots$ — натуральное число. Тогда производная порядка n от функции $y = f(x)$ определяется по формуле

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))'.$$

Ясно, что, исходя из первой производной $y'(x)$, последовательно можно найти производные любого порядка:

$$y''(x) = (y'(x))', \ y'''(x) = (y''(x))' \text{ и т. д.}$$

Если существуют производные функции $y = f(x)$ до какого-нибудь $n = 2, 3, \ldots$, то говорят, что функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз. Если, дополнительно, n-я производная $y^{(n)}(x)$ непрерывна на интервале (a, b), то функция $y = f(x)$ называется n-раз непрерывно дифференцируемой на интервале (a, b).

Если функция $y = f(x)$ имеет производные любого порядка, то такая функция называется *бесконечно дифференцируемой*. Далее увидим, что все элементарные функции бесконечно дифференцируемы всюду, где они определены.

Пример 6.14. $y = x^m$, m — натуральное число. Имеем $y' = (x^m)' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$, ..., $y^{(m)} = m!$ Ясно, что все производные $(x^m)^{(n)} \equiv 0$, если $n \geq m + 1$. В общем виде любую производную от x^m можно записать в виде

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}, \ n = 1, 2, \ldots .$$

Пример 6.15. $y = \sin x$. Имеем $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{\mathrm{IV}} = \sin x$. Очевидно, что все последующие вычисления производных пятого, шестого и других порядков будут повторяться. Нетрудно убедиться, что производную n-го порядка можно представить в виде

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \ n = 1, 2, \ldots .$$

Аналогично

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \ n = 1, 2, \ldots .$$

Пример 6.16. $y = a^x$. Имеем $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a$, ... Общая формула $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$.

Пример 6.17. $y = \ln x$, $y' = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, $y'' = (-1)x^{-2}$, $y^m = (-1)(-2)x^{-3}$, ... Общая формула $(\ln x)^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n+1)x^{-n}$, или, что то же,

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}.$$

С помощью производных высших порядков вводятся дифференциалы высших порядков. Как и производные, они определяются последовательно.

Именно, второй дифференциал d^2y есть дифференциал от первого дифференциала, $dy = f'(x)\Delta x$, при том же самом приращении Δx. Таким образом, $d^2y = d(dy)$ или, подробнее

$$d^2y = d(f'(x)\Delta x) = d(f'(x))\Delta x = f''(x)\Delta x\Delta x = f''(x)(\Delta x)^2.$$

Аналогично

$$d^3y = f'''(x)(\Delta x)^3 \text{ и т. д.}$$

Определение 6.6. *Дифференциалом* n-го порядка от функции $y = f(x)$ называется первый дифференциал от дифференциала порядка $n - 1$, т.е.

$$d^n y = d(d^{n-1}y)$$

или, что то же,

$$d^n y = f^{(n)}(x)(\Delta x)^n.$$

Еще раз отметим, что все дифференциалы, начиная с первого, определяются при одном и том же приращении Δx.

Пример 6.18. Воспользуемся только что вычисленными производными n-го порядка. Получим следующие дифференциалы n-го порядка:

а) $d^n(x^m) = m(m - 1)...(m - n + 1)x^{m-n}(\Delta x)^n$;

б) $d^n(\sin x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)(\Delta x)^n$;

в) $d^n(\cos x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)(\Delta x)^n$;

г) $d^n(a^x) = a^x \ln^n a(\Delta x)^n$;

д) $d^n(\ln x) = (-1)^{n-1}(n - 1)!\ x^{-n}(\Delta x)^n$.

При вычислении дифференциалов общепринято приращение Δx независимого аргумента x обозначать dx, т.е. по определению полагать $\Delta x = dx$. Тогда дифференциалы запишутся в виде

$$dy = f'(x)dx;\ d^2y = f''(x)(dx)^2;\ ...;\ d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Эта форма записи дифференциалов особенно полезна в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которые будут рассмотрены в гл. 11.

6.6. Формула Тейлора

Пусть $f(x)$ — функция, определенная в некоторой окрестности U_{x_0} фиксированной точки x_0. Формула Тейлора приближенно выражает значения $f(x)$ при $x \neq x_0$ через значения функции и ее производных в точке x_0, т.е. через значения $f(x_0)$, $f'(x_0)$, ...

С таким приближенным представлением функции $f(x)$ мы уже сталкивались, сравнивая дифференциал функции с ее полным приращением, а именно [см. формулу (6.17)]

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \tag{6.18}$$

Здесь $o(x - x_0)$ — погрешность приближения

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{6.19}$$

являющаяся бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем приращение аргумента $\Delta x_0 = x - x_0$.

Формула (6.18) и тем самым приближение (6.19) справедливы для любой функции, имеющей в точке x_0 первую производную $f'(x_0)$. Возникает естественный вопрос: если функция имеет не только первую производную $f'(x_0)$, но и высшие производные $f''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$ до порядка $n \geq 2$, то нельзя ли формулы (6.18), (6.19) уточнить и получить приближение функции более высокой точности. Ответ заключается в следующей теореме.

Теорема 6.10. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности U_{x_0} и имеет в этой окрестности производные $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ до порядка $n \geq 1$, причем $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда для любой точки $x \in U_{x_0}$ справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \qquad (6.20)$$

Формула (6.20) носит название *формулы Тейлора* порядка n и является основной формулой дифференциального исчисления. Поэтому прежде чем дать доказательство этой формулы, скажем несколько слов о ее содержании.

Выражение

$$T_n \equiv f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

есть, очевидно, многочлен степени n, который называется многочленом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0. Таким образом, из формулы (6.20) следует, что функция $f(x)$ приближенно равна своему многочлену Тейлора $T_n(x)$, при этом абсолютная погрешность приближения $f(x) \approx T_n(x)$, $x \in U_{x_0}$ есть $o((x - x_0)^n)$, т.е. бесконечно малая более высокого порядка малости, чем старшая степень одночлена $x - x_0$, входящая в $T_n(x)$.

Можно показать, что никакой другой многочлен степени n, кроме многочлена Тейлора, не дает приближения функции $f(x)$ с точностью $o((x - x_0)^n)$. В этом смысле многочлен Тейлора является многочленом наилучшего приближения функции $f(x)$ вблизи точки x_0.

Доказательство. Обозначим $\alpha_n(x_0, x - x_0) \equiv f(x) - T_n(x)$ и покажем, что при $x \to x_0$ величина $\alpha_n(x_0, x - x_0)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $(x - x_0)^n$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_n(x_0, x - x_0)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Действительно, применяя n раз правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_n(x_0,x-x_0)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\ldots-\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-\dfrac{1}{2!}f''(x_0)2(x-x_0)-\ldots-\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)n(x-x_0)^{n-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)-\ldots-\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)}{n!}=0,$$

так как по условию $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке x_0. ▲

Замечание. Особенно просто выглядит формула Тейлора в случае $x_0=0$, а именно

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

Приведем представления основных элементарных функций по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=0$.

Пример 6.19. Пусть $f(x)=\mathrm{e}^x$. Тогда $f^{(n)}(x)\equiv(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$ и, следовательно, коэффициенты многочлена Тейлора

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!},\ n=0,1,\ldots\,.$$

Таким образом,

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

Пример 6.20. Пусть $f(x)=\sin x$. Тогда

$$f^{(n)}(x)\equiv(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, коэффициенты Тейлора

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)}{n!}=\begin{cases}0,\ \text{есл},\ \ n=2m,\\ \dfrac{(-1)^m}{(2m+1)!},\ \text{есл},\ \ n=2m+1,\ \ m=0,1,\ \ldots.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}+o(x^{2m+1}).$$

Пример 6.21. Пусть $f(x) = \cos x$. Имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + o(x^{2m}).$$

Пример 6.22. Пусть $f(x) = \ln(1 + x)$. Тогда

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n - 1)!(1 + x)^{-n}$$

и, следовательно,

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n - 1)!.$$

Отсюда получаем, что

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n).$$

Пример 6.23. Пусть $f(x) = (1 + x)^\alpha$, где α — вещественное число. Тогда

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$$

и, следовательно,

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1).$$

Таким образом,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

Представление функций по формуле Тейлора имеет разнообразные приложения, с которыми будем неоднократно встречаться далее, а здесь покажем на примере, как можно использовать эту формулу при нахождении пределов.

Пример 6.24. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$. Используя формулу Тейлора

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

будем иметь

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = -\frac{1}{6}.$$

6.7. Экстремумы функций

Теория экстремумов посвящена задаче нахождения тех точек, в которых значения функции $y = f(x)$ являются наибольшими или наименьшими среди всех значений этой функции в близлежащих точках. Такие точки мы назвали в 6.2 точками локального максимума или локального минимума функции $y = f(x)$. Теория локального экстремума функции $y = f(x)$ позволяет «видеть» поведение функции при изменении аргумента и, в частности, строить ее график.

6.7.1. Необходимое условие экстремума

Определение 6.7. Точки локального максимума и локального минимума функции $y = f(x)$ называются ее *экстремальными точками*.

Пример 6.25. Точка $x = 0$ является точкой локального минимума функции $y = |x|$ (рис. 6.8).

Пример 6.26. На рис. 6.2 точка $x = b$ является точкой локального максимума функции $f(x)$, а точка $x = a$ — точкой локального минимума.

Зададимся вопросом: как найти экстремальные точки заданной функции $y = f(x)$? К сожалению, универсального ответа на этот вопрос нет и решать его следует всякий раз индивидуально для каждой конкретно заданной функции. Однако, если ограничиться рассмотрением *дифференцируемых* функций, то здесь имеется ряд результатов, носящих общий характер.

Прежде всего вспомним лемму Ферма (см. лемму 6.2), приводящую к необходимому условию локального экстремума.

Если $y = f(x)$ — *дифференцируемая функция* и x_0 — *экстремальная точка этой функции*, то

$$f'(x_0) = 0. \tag{6.21}$$

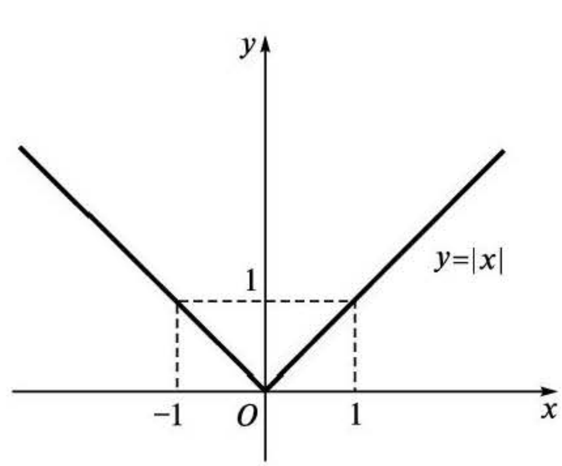


Рис. 6.8

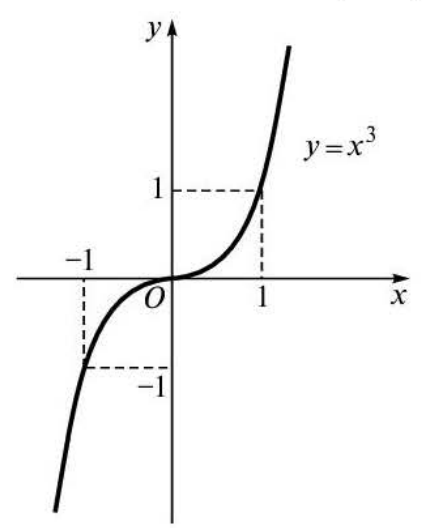


Рис. 6.9

Из этого утверждения следует, что все точки локального экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$ обязательно являются корнями уравнения (6.21). Тем самым условие (6.21) является необходимым условием экстремума.

Обратное, однако, неверно, т.е. точка x_0 может быть решением уравнения (6.21), но не являться экстремальной точкой функции $y = f(x)$. Примером такой точки может служить точка $x = 0$ для функции $y = x^3$. Действительно, $x = 0$ удовлетворяет уравнению $y' = 0$, но в то же время не является ни точкой локального максимума, ни точкой локального минимума (рис. 6.9).

Чтобы различить корни уравнения (6.21) и точки локального экстремума, введем определение.

Определение 6.8. Точки x, удовлетворяющие уравнению $f'(x) = 0$, называются *стационарными точками* функции $y = f(x)$.

Из определения ясно, что стационарных точек, вообще говоря, больше, чем точек экстремума. В связи с этим возникает вопрос о том, каким способом выделить среди стационарных точек те, которые действительно являются экстремальными точками функции $y = f(x)$.

Сформулируем две теоремы, дающие достаточные условия экстремума.

6.7.2. Достаточные условия экстремума

Теорема 6.11 (достаточное условие экстремума по знаку первой производной). Пусть выполнены следующие условия:

1) $x_0 \in (a, b)$ — стационарная точка дифференцируемой на (a, b) функции $f(x)$, т.е. $f'(x_0) = 0$;

2) при переходе аргумента x через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак.

Тогда точка x_0 является точкой локального экстремума функции $f(x)$, причем:

а) если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка локального минимума;

б) если, напротив, $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка локального максимума.

Замечание. Отметим, что, говоря о смене знака производной $f'(x)$ при переходе через точку x_0, подразумеваем, что условия $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$ имеют место вблизи точки x_0, поскольку речь идет о нахождении локальных экстремумов. Ясно, что в этом случае значения функции или ее производной в точках, далеких от x_0, роли не играют.

Доказательство. Пусть интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ($\delta > 0$ — некоторое число) есть та окрестность, в которой выполнены условия теоремы, например, условия а), т.е. $f'(x) < 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Определение 2.3. *Произведением* матрицы $A = \|a_{ij}\|$ на действительное число λ называется матрица $B = \|b_{ij}\|$, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением их на число λ: $B = \lambda A$ означает, что $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для всех значений i и j.

Операция нахождения матрицы B называется *умножением* матрицы A на число λ.

Пример 2.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 0 & 7 & -6 \end{pmatrix}$ и $\lambda = -2$. Тогда

$$(-2)A = \begin{pmatrix} -10 & -16 & 2 \\ 0 & -14 & 12 \end{pmatrix}.$$

В частности, при умножении матрицы A на (-1) получится матрица, которая в сумме с матрицей A дает нулевую матрицу: $A + (-1)A = O$. Эту матрицу обозначают как $(-A)$, определяя операцию *вычитания* для матриц по формуле

$$A - B = A + (-1)B.$$

Полученная таким образом матрица называется *разностью* матриц A и B.

Таким образом, если имеется несколько матриц $A_1, A_2, \ldots, A_k$, то можно, применяя несколько раз операцию сложения и умножения матриц на число, получить матрицу $C = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k$. Такая матрица называется *линейной комбинацией* матриц $A_1, A_2, \ldots, A_k$, а про матрицу C говорят, что она *линейно выражается* через матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Умножение матрицы на число и операция сложения матриц при совместном применении, как нетрудно доказать, обладают следующими свойствами:

1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
3) $(\lambda\mu)\ A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$.

Определение 2.4. Произведением двух матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{np} \end{pmatrix}$$

называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mp} \end{pmatrix},$$

Покажем, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный минимум.

Действительно, так как x_0 — стационарная точка функции $f(x)$, т. е. $f'(x_0) = 0$, то в левом полуотрезке $(x_0 - \delta, x_0]$ производная $f'(x) \leq \leq 0$, а в правом полуотрезке $[x_0, x_0 + \delta)$ производная $f'(x) \geq 0$. Согласно критерию монотонности (см. теорему 6.7) это означает, что на левом полуотрезке $(x_0 - \delta, x_0]$ функция $f(x)$ убывает и, следовательно, $f(x) \geq f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0]$. На правом же полуотрезке $[x_0, x_0 + \delta)$, напротив, $f(x)$ монотонно возрастает и, следовательно, $f(x_0) \leq f(x)$ для всех $x \in [x_0, x_0 + \delta)$. В итоге для любой точки из полной окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ справедливо неравенство $f(x_0) \leq \leq f(x)$.Тем самым установлено, что x_0 — локальный минимум.

Аналогично рассматривается и случай б. ▲.

Пример 6.27. Рассмотрим функцию $y = x(x - 2)$. Имеем $y'(x) \equiv \equiv 2x - 2 = 0$ в точке $x = 1$. Значит, точка $x_0 = 1$ — стационарная точка функции $y = x(x - 2)$. Замечаем теперь, что при $x < 1$ производная $y' < 0$, а при $x > 1$ производная $y' > 0$. Следовательно, точка $x_0 = 1$ — точка локального минимума функции $y = x(x - 2)$.

Теорема 6.12 (достаточное условие экстремума в терминах второй производной). Пусть выполнены следующие условия:

1) точка x_0 — стационарная точка, т. е. $f'(x_0) = 0$;

2) функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, причем $f''(x)$ непрерывна в этой точке;

3) $f''(x_0) \neq 0$.

Тогда x_0 есть точка локального экстремума функции $f(x)$, причем:

а) если $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 — точка локального минимума;

б) если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 — точка локального максимума.

Доказательство. По формуле Тейлора для любой точки x имеем

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2),$$

где $o((x - x_0)^2)$ — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x - x_0)^2$, т. е. $\dfrac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2} \to 0$ при $x \to x_0$. Так как $f'(x_0) = 0$, то эта формула может быть записана в виде

$$f(x) - f(x_0) = \left[\frac{f''(x_0)}{2} + o(1)\right](x - x_0)^2, \tag{6.22}$$

где $o(1) \to 0$ при $x \to x_0$. Ясно, что при x, достаточно близких к x_0, знак квадратной скобки будет тем же самым, что и знак числа $f''(x_0)$. Поэтому, если $f''(x_0) > 0$, то из (6.22) немедленно получаем, что в достаточно малой окрестности точки x_0

$$f(x) - f(x_0) \geq 0.$$

Это означает, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный минимум. Аналогично, если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум. ▲

Пример 6.28. Рассмотрим функцию $y = x^4 + x^2 + 1$. Имеем $y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1)$, откуда из уравнения $y' = 0$ получаем, что $x_0 = 0$ — стационарная точка. Далее $y'' = 12x^2 + 2$ и, следовательно, $y''(0) = 2 > 0$. Таким образом, точка $x_0 = 0$ является точкой экстремума функции $y = x^4 + x^2 + 1$, а более точно, точкой минимума.

6.8. Выпуклые функции. Точки перегиба

Свойство выпуклости функции есть одна из наиболее тонких ее характеристик. Знание участков выпуклости и точек, в которых направление выпуклости меняется, особенно существенно при построении графика функции.

6.8.1. Определение. Критерий выпуклости

Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая на интервале (a, b) функция. Как известно, в любой точке $M_0(x_0, y_0)$ графика этой функции имеется касательная прямая T_{M_0}, уравнение которой определяется формулой

$$T_{M_0} : y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

или, что то же,

$$T_{M_0} : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{6.23}$$

Определение 6.9. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз* на интервале (a, b), если, какова бы ни была точка $x_0 \in (a, b)$, график этой функции целиком находится над графиком касательной T_{M_0} (рис. 6.10).

Аналогично определяется выпуклость вверх с заменой слов «над графиком» на слова «под графиком».

Замечание. Анализируя рис. 6.10, можно понять математический смысл понятия выпуклости вниз. Именно, в любой точке отрезка $x \in (a, b)$ величина $l(x)$, равная разности ординат графиков функции $y = f(x)$ и касательной прямой T_{M_0}, неотрицательна, т.е.

$$l(x) \equiv f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0. \tag{6.24}$$

Для выпуклых вверх функций, очевидно, $l(x) \leq 0$.

Как оказывается, свойство выпуклости тесно связано со знаком второй производной $f''(x)$.

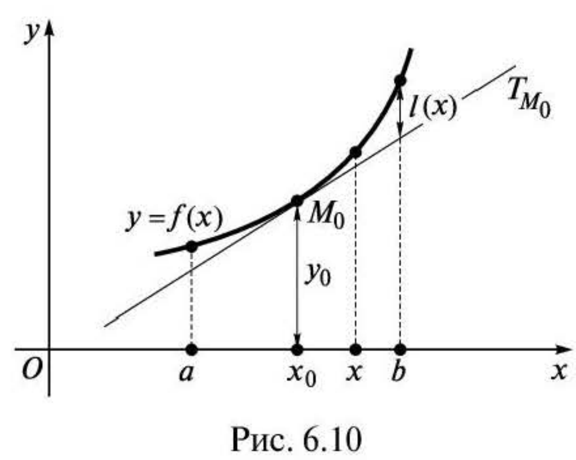


Рис. 6.10

Теорема 6.13. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция на интервале (a, b), причем вторая производная $f''(x)$ непрерывна на интервале (a, b). Тогда нижеследующие утверждения А и Б равносильны:

А) функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b);

Б) в любой точке $x \in (a, b)$ вторая производная $f''(x) \geq 0$.

Доказательство [импликация А $\Rightarrow$ Б]. Пусть $f(x)$ выпукла вниз на (a, b). Тогда, согласно формуле (6.24), при любой фиксированной точке $x_0 \in (a, b)$

$$l(x) \equiv f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \qquad (6.25)$$

для всех $x \in (a, b)$. В соответствии с формулой Тейлора,

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Следовательно, в силу (6.25) и

$$\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \geq 0$$

или, что то же,

$$\frac{f''(x_0)}{2} + \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2} \geq 0. \qquad (6.26)$$

Переходя к пределу в неравенстве (6.26) при $x \to x_0$, немедленно получаем, что $f''(x_0) \geq 0$.

Так как x_0 выбрана произвольно, это значит, что $f''(x) \geq 0$ на интервале (a, b).

Обратно [импликация А $\Leftarrow$ Б]. Пусть $f''(x) \geq 0$ всюду на интервале (a, b). Покажем, что $l(x) \geq 0$ на (a, b). Действительно, очевидно, что $l(x_0) = 0$. В то же время $l'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, а $l''(x) = f''(x) \geq 0$. Второе неравенство означает, что функция $l'(x)$ монотонно возрастает, обращаясь, очевидно, в нуль в точке x_0. Это значит, что производная $l'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «минуса» на «плюс». Тем самым в точке x_0 функция $l(x)$ имеет минимум. Поскольку $l(x_0) = 0$, то для $x \neq x_0$ функция $l(x) \geq 0$. Это и означает, что функция $y = f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b). ▲

Обратимся к точкам перегиба функции $y = f(x)$.

6.8.2. Исследование точек перегиба

Определение 6.10. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется *точкой перегиба* графика функции $y = f(x)$ [или функции $f(x)$], если при переходе через эту точку у графика функции меняется направление выпуклости.

Пример 6.29. Функция $y = x^3$ (см. рис. 6.9) имеет в точке $x = 0$ перегиб, так как слева от нуля ее график является выпуклым вверх, а справа — вниз.

Пример 6.30. Функция $y = \cos x$ имеет на интервале $(0, 2\pi)$ две точки перегиба $x = \dfrac{\pi}{2}$ и $x = \dfrac{3\pi}{2}$ (см. рис. 5.2).

Для фактического нахождения точек перегиба функции $f(x)$ используется теорема о необходимом условии перегиба.

Теорема 6.14. Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b), причем $f''(x)$ непрерывна. Пусть далее $x_0 \in (a, b)$ — точка перегиба $f(x)$. Тогда

$$f''(x) = 0. \tag{6.27}$$

Доказательство. Пусть (для определенности) при переходе через точку x_0 график функции $f(x)$ меняет выпуклость вниз на выпуклость вверх.

В соответствии с критерием выпуклости (см. теорему 6.13) это значит, что при $x < x_0$ справедливо неравенство $f''(x) \geq 0$, а при $x > x_0$, напротив, $f''(x) \leq 0$. Поскольку по предположению $f''(x)$ непрерывна на (a, b), то она непрерывна и в точке x_0, т.е. $f''(x) \to$ $\to f''(x_0)$ в процессе $x \to x_0$.

Очевидно, что переходя в неравенстве $f''(x) \geq 0$ к пределу $x \to x_0$ слева, а затем в неравенстве $f''(x) \leq 0$ — справа, получаем, что предельное значение $f''(x_0)$ удовлетворяет неравенствам $f''(x_0) \geq 0$ и $f''(x_0) \leq 0$. Это значит, что $f''(x_0) = 0$, что и требуется. ▲

Замечание. Из доказанного ясно, что для дважды дифференцируемых функций уравнение (6.27) является необходимым условием перегиба функции в точке x_0. Это не значит, однако, что всякая точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f''(x_0) = 0$, обязана быть точкой перегиба.

Пример 6.31. Рассмотрим функцию $y = x^4$. Очевидно, что в точке $x_0 = 0$ производная $y'' = 12x^2$ обращается в нуль, но точка $x_0 = 0$ является точкой минимума, а не точкой перегиба функции $y = x^4$ (рис. 6.11).

Простым достаточным условием, обеспечивающим перегиб графика $f(x)$ в точке $x_0 \in (a, b)$, является следующая теорема.

Теорема 6.15. Пусть точка x_0 является корнем уравнения $f''(x) = 0$, т.е. $f''(x_0) = 0$. Если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$, при этом:

а) если при $x < x_0$ $f''(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f''(x) < 0$, то выпуклость вниз меняется на выпуклость вверх;

б) если при $x < x_0$ $f''(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f''(x) > 0$, то выпуклость вверх меняется на выпуклость вниз.

Доказательство теоремы немедленно следует из теоремы 6.13. При этом ясно, что x_0 — изолированная точка перегиба, т.е. вблизи других точек перегиба нет.

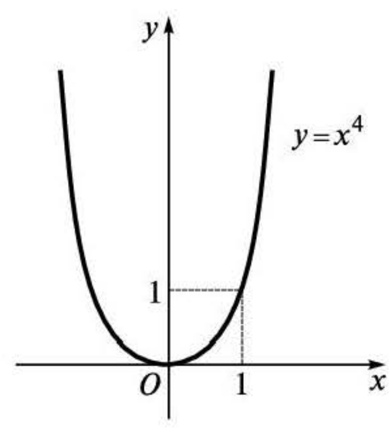


Рис. 6.11

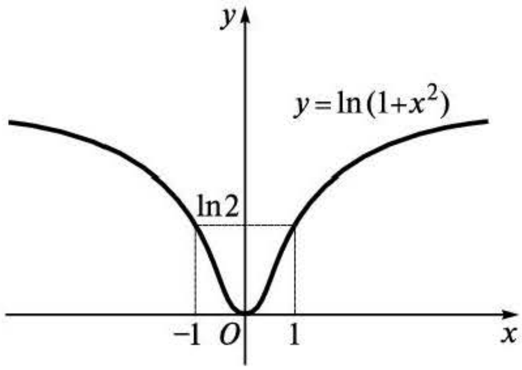


Рис. 6.12

Пример 6.32. Найдем точки перегиба функции $y = \ln(1 + x^2)$. Имеем

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Следовательно, уравнение $y'' = 0$ имеет два решения $x_0 = 1$, $x_1 = -1$. Выясним, используя теорему 6.15, являются ли эти точки действительно точками перегиба.

Очевидно, знак второй производной определяется знаком числителя, т.е. величиной $(1 - x^2) = (1 - x)(1 + x)$. Ясно, что вблизи точки $x = 1$ второй множитель $(1 + x)$ положителен и, следовательно, знак произведения определяет первый множитель $1 - x$, который отрицателен при $x > 1$ и, напротив, положителен при $x < 1$. Таким образом, $x_0 = 1$ является изолированной точкой перегиба (см. п. б) теоремы 6.15). Аналогично получаем, что точка $x_1 = -1$ также является точкой перегиба функции $y = \ln(1 + x^2)$. График ее представлен на рис. 6.12.

6.9. Асимптоты. Общая схема построения графиков

Основная цель подраздела — дать общую схему построения графиков функций. Бóльшая часть элементов этой схемы уже подготовлена, в частности, теория экстремумов, определение интервалов выпуклости, монотонности графика, точек перегиба и т.д. Не менее важными элементами построения графиков являются асимптоты графика (говорят также асимптоты функции). Асимптоты бывают разными. Здесь изучим только прямолинейные асимптоты, которые разделяются на три типа: горизонтальные, вертикальные и наклонные.

Определение 6.11. Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (или, что то же, $\lim\limits_{x\to+\infty}(b - f(x)) = 0$).

Аналогично определяется горизонтальная асимптота в процессе $x \to -\infty$.

Определение 6.12. Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Если $f(x) \to \infty$ при $x \to a$ справа (т.е. при $x > a$), то говорят, что прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой «справа». Аналогично для предела слева.

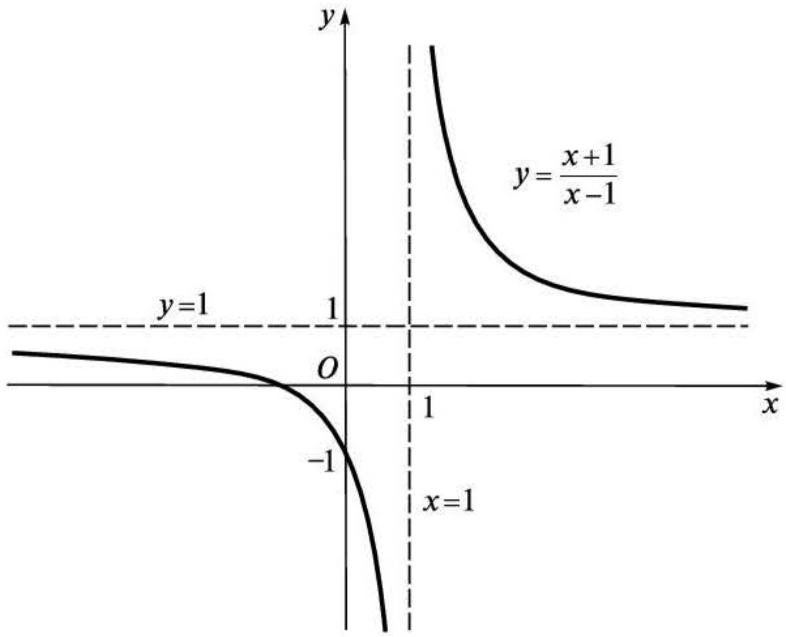


Рис. 6.13

Пример 6.33. Пусть $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. Очевидно $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = 1$. Следовательно, прямая $y = 1$ является горизонтальной асимтотой как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$. Далее, точка $x = 1$ является нулем знаменателя, при этом $\lim\limits_{x\to 1} y(x) = \infty$. Следовательно, прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой функции y (рис. 6.13).

Определение 6.13. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx - b\right] = 0. \tag{6.28}$$

Геометрически это означает, что в процессе $x \to \infty$ график функции $y = f(x)$ сколь угодно близко приближается к прямой $y = kx + b$.

Отметим, что на практике полезно различать наклонные асимптоты функции $y = f(x)$ в процессе $x \to +\infty$ и в процессе $x \to -\infty$, так как они могут быть различными.

Из определения наклонной асимптоты, а точнее из условия (6.28), вытекают весьма простые формулы для нахождения углового коэффициента k и свободного члена b.

Действительно, если $f(x) - kx - b \to 0$, то и

$$\frac{f(x) - kx - b}{x} \to 0 \text{ при } x \to \infty.$$

Отсюда

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{b}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Итак,

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{6.29}$$

После того, как найдено число k, вновь из (6.28) немедленно получим, что

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx]. \tag{6.30}$$

Формулы (6.29) и (6.30) суть искомые формулы нахождения параметров k и b наклонной асимптоты.

Пример 6.34. Найдем наклонную асимптоту функции $y = (x-2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. Имеем

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x} \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 1.$$

Значит, возможная наклонная асимптота имеет вид $y = x + b$. Далее,

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[(x-2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[x(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 1) - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 2 = (\text{замена } t = \frac{1}{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{t} - 2 = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{t} - 2 = -3.$$

Следовательно, можно сделать вывод о том, что прямая $y = x - 3$ является наклонной асимптотой графика функции $y = (x-2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ (рис. 6.14).

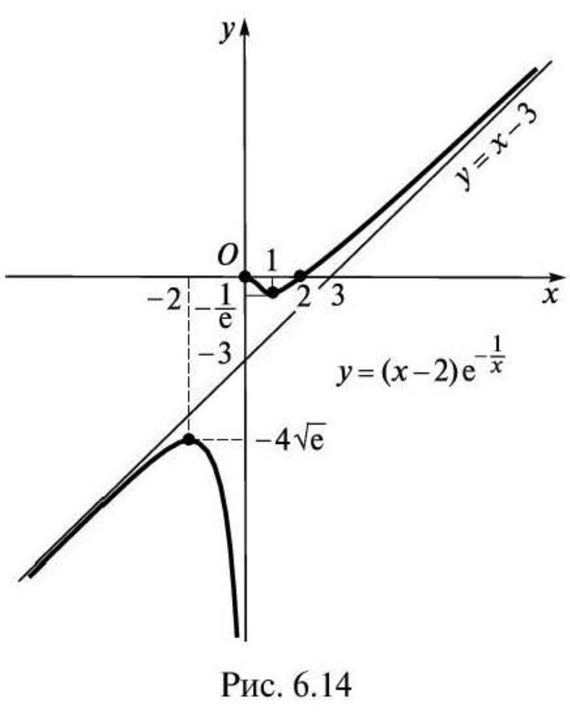


Рис. 6.14

В заключение на конкретном примере дадим общую **схему построения графика функции**.

Именно, построим график функции $y = (x-2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, изображенный на рис. 6.14. При построении графика желательно (но вовсе не обязательно) соблюдать следующий порядок.

1. Область определения. Очевидно, функция $y = (x-2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ определена всюду, кроме $x = 0$, поэтому область определения D есть вся ось $\mathbf{R}^1$, кроме нуля, или, что то же, $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ — объединение двух открытых полуосей $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

2. Характерные точки. Обычно это точки пересечения графика с осями координат, точки разрыва, отдельные (легко вычисляемые) значения функции и др.

В нашем случае $x = 2$ — точка пересечения с осью Ox. С осью Oy график не пересекается, так как $x = 0$ не входит в область определения функции $y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$.

Полезно отметить, однако, что при $x \to 0$ справа

$$\lim_{x \to +0}(x-2)e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +0} e^{-\frac{1}{x}} = 0,$$

а при $x \to 0$ слева

$$\lim_{x \to -0}(x-2)e^{-\frac{1}{x}} = -\infty .$$

Следовательно, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика слева.

3. Поведение на бесконечности. Наклонные асимптоты. Легко видеть, что

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = \lim_{x \to \pm\infty}(x-2)e^{-\frac{1}{x}} = \pm\infty ,$$

что приводит к мысли о возможном существовании наклонных асимптот. И это так. Как было ранее установлено (см. пример 6.34) прямая $y = x - 3$ есть наклонная асимптота графика функции $y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$.

4. Экстремумы и интервалы монотонности. На эти вопросы ответ содержится в исследовании первой производной функции $y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$. Как показывают вычисления,

$$y' = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2+x-2}{x^2}\right).$$

Следовательно, $y' = 0$ в тех точках, где $x^2 + x - 2 = 0$, т. е. в точках $x = 1$ и $x = 2$. Поскольку при переходе через точку $x = 1$ производная y' меняет знак с «–» на «+», то точка $x = 1$ — точка минимума (при этом $y(1) = -\frac{1}{e}$). Напротив, при переходе через точку $x = -2$ производная y' меняет знак с «+» на «–», поэтому точка $x = -2$ — точка максимума (при этом $y(-2) = -4\sqrt{e}$).

Поскольку ни в каких других точках, кроме $x = -2$ и $x = 1$, производная $y'(x)$ не обращается в нуль, то автоматически получим интервалы монотонности:

$-\infty < x < -2$ — интервал возрастания;

$-2 < x < 0$ — интервал убывания;

$0 < x < 1$ — интервал убывания;

$1 < x < +\infty$ — интервал возрастания.

5. Точки перегиба и интервалы выпуклости. Эти вопросы исследуются с помощью второй производной. Имеем в нашем случае

$$y'' = \frac{5x-2}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Следовательно, точка $x = \frac{2}{5}$, возможно, точка перегиба. Это действительно так, поскольку $y'' < 0$ при $x < \frac{2}{5}$ и, наоборот, $y'' > 0$ при $x > \frac{2}{5}$. (Разумеется, точка $x = 0$ исключается, так как она не входит в область определения.) Итак, точка $x = \frac{2}{5}$ является точкой перегиба, причем слева от этой точки график функции имеет выпуклость вверх, а справа — вниз.

Теперь, имея достаточно информации, можно построить график функции $y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$, последовательно отметив на рисунке характерные точки графика, наметив его отдельные фрагменты и плавно соединив. Получим график, изображенный на рис. 6.14.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Пусть

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

(читается «знак x» или «сигнум x»). Установите следующие формулы:

$$|x|' = \operatorname{sgn} x \ (x \neq 0),$$

$$(x^2 \operatorname{sgn} x)' = 2|x|, \ -\infty < x < +\infty.$$

При этом докажите, исходя из определения производной, что функция $|x|$ в точке $x = 0$ недифференцируема и, напротив, производная функции $x^2 \operatorname{sgn} x$ в точке $x = 0$ существует и равна нулю.

2. Функция, определенная на интервале $(-a, a)$, называется нечетной, если для любой точки x из интервала $(-a, a)$ справедливо равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Если же для любой точки x из интервала $(-a, a)$ имеет место равенство $f(-x) = f(x)$, то функция называется четной.

Докажите, что производная нечетной функции есть четная функция, а производная четной функции есть нечетная функция.

3. Функция $f(x)$, определенная на всей вещественной оси, называется периодической функцией с периодом T, если для всех вещественных x справедливо равенство

$$f(x+T) = f(x).$$

Докажите, что производная периодической функции есть также периодическая функция с тем же периодом T.

4. Известно (см. лемму 6.3), что если на интервале (a, b) производная $f'(x) = 0$, то функция $f(x)$ постоянна на (a, b), т.е. $f(x) \equiv \text{const}$, $x \in (a, b)$.

Пусть теперь функция $f(x)$ определена на множестве $E = (a, b) \cup (c, d)$, являющимся объединением двух непересекающихся интервалов. Верно ли утверждение: если $f'(x) \equiv 0$ на множестве E, то $f(x)$ постоянна на множестве E?

5. Докажите, что прямая

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

является касательной прямой, проведенной к графику эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точке x_0, y_0.

6. Запишите многочлен

$$P(x) \equiv 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 3x - 7$$

по степеням двучлена $x - 1$.

7. Докажите, что на отрезке $[a, b]$ всякая линейная функция принимает наибольшее и наименьшее значения в конечных точках a и b.

8. Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ определена на всей вещественной оси и монотонна. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(\alpha x + \beta)$, где α и β — произвольно взятые числа. Опираясь на критерий монотонности, докажите, что функция $\varphi(x)$ также монотонна.

9. Найдите асимптоты функций:

1) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, 2) $y = \dfrac{x^2}{x + 2}$, 3) $y = x \operatorname{arctg} x$.

имеющая столько же строк, сколько их имеет матрица A, и столько же столбцов, сколько их имеет матрица B, и элементы которой находятся по формулам

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Операция нахождения произведения матриц A и B называется *умножением* матриц, и его результат записывается так: $C = AB$.

Как следует из определения произведения двух матриц A и B, операция умножения возможна лишь при условии, что число столбцов у матрицы A равно числу строк у матрицы B. При этом матрицы A и B не обязаны иметь одинаковые размеры. Отсюда следует, что не всегда произведения AB и BA существуют одновременно, а если существуют, то не всегда совпадают. Это видно из следующих примеров.

Пример 2.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 - 3\cdot 4 + 4\cdot(-1) & 2\cdot 3 + (-3)\cdot 0 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 4 + 1\cdot(-1) & 3\cdot 3 + 4\cdot 0 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 14 \\ 30 & 11 \end{pmatrix},$$

$$D = BA = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 + 3\cdot 3 & 5\cdot(-3) + 3\cdot 4 & 5\cdot 4 + 3\cdot 1 \\ 4\cdot 2 + 0\cdot 3 & 4\cdot(-3) + 0\cdot 4 & 4\cdot 4 + 0\cdot 1 \\ (-1)\cdot 2 + 2\cdot 3 & 1\cdot 3 + 2\cdot 4 & (-1)\cdot 4 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -3 & 23 \\ 8 & -12 & 16 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix},$$

откуда видно, что AB и BA совершенно различные матрицы.

Пример 2.4. $A = \| a_{ij} \|$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, тогда

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Если ввести в рассмотрение матрицу $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$, то матричное соотношение $AX = B$ будет эквивалентно, как следует из определения равенства двух матриц, следующей системе соотношений:

Г Л А В А 7

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Первообразная и неопределенный интеграл

7.1.1. Первообразная. «Почти единственность» первообразной

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, заданная на интервале (a, b). По этой функции определяется вторая функция $F(x)$, также заданная на интервале (a, b), называемая первообразной функции $f(x)$.

Определение 7.1. Дифференцируемая функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если в каждой точке интервала (a, b) справедливо равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Пример 7.1. Пусть $f(x) = 1$. Тогда в качестве первообразной этой функции можно взять $F(x) = x$, так как $x' = 1$.

Пример 7.2. Пусть $f(x) = \cos x$. Тогда в качестве первообразной этой функции можно взять $F(x) = \sin x$, так как $(\sin x)' = \cos x$.

Читатель, вспомнив таблицу производных, без труда приведет дополнительные примеры различных первообразных.

Теперь обратим внимание на то, что первообразная заданной функции $f(x)$ определяется неоднозначно. Действительно, если функция $F(x) = x$ является первообразной функции $f(x) = 1$, то и функция $G(x) = x + c$, где c — произвольная постоянная, также является первообразной той же функции $f(x) = 1$. Это немедленно следует из того, что при любом выборе c производная $(x + c)' = x' + c' = 1$, поскольку $c' = 0$.

То же самое можно сказать и о том, что для функции $f(x) = \cos x$, наряду с $F(x) = \sin x$, ее первообразной является и любая функция $G(x) = \sin x + c$, где c — любая постоянная.

Это наблюдение не случайно: оказывается, отмеченная неоднозначность первообразной $f(x)$ имеет место для любой функции $f(x)$. Более того, указанная неоднозначность (в виде аддитивной постоянной c) полностью исчерпывает произвол, возникающий при определении первообразной.

Теорема 7.1 (о «почти единственности» первообразной). Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — две первообразные одной и той же функции $f(x)$. Тогда найдется постоянная c такая, что $G(x) = F(x) + c$ для всех $x \in (a, b)$.

Доказательство. Действительно, в соответствии с определением 7.1 в любой точке $x \in (a, b)$ справедливы равенства

$$F'(x) = f(x) \text{ и } G'(x) = f(x). \tag{7.1}$$

Обозначим $u(x) = G(x) - F(x)$. Тогда из (7.1) немедленно следует, что $u'(x) = 0$ на интервале (a, b). Следовательно (см. лемму 6.3, п. 6.3.2), функция $u(x)$ постоянна на интервале (a, b), т.е. $u(x) = c$, где c — некоторая постоянная. Это и значит, что $G(x) - F(x) = c$, т.е. $G(x) = F(x) + c$. ▲

Из теоремы следует, что множество всех первообразных заданной функции $f(x)$ может быть получено из какой-либо конкретной первообразной $F(x)$ путем добавления произвольной постоянной. Именно так и было сделано в предыдущих примерах.

7.1.2. Таблица неопределенных интегралов

Определение 7.2. Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначается символом

$$\int f(x)dx.$$

Иначе, по определению,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$; C — произвольная постоянная.

Из определения ясно, что

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x),$$

т.е. операция неопределенного интегрирования является обратной по отношению к операции дифференцирования. Это дает возможность «прочитать» известную таблицу производных «справа — налево» и получить таблицу основных неопределенных интегралов (табл. 7.1).

Кроме того, на практике часто встречаются неопределенные интегралы (табл. 7.2), существенно дополняющие основные.

Разумеется, далеко не всякий неопределенный интеграл может быть найден исходя из приведенных табличных интегралов. Более того, весьма простые на вид неопределенные интегралы вообще не вычисляются через элементарные функции. К таким интегралам относятся, например, такие:

$$\int e^{-x^2}dx, \int \frac{dx}{\ln x} \text{ и др.}$$

Таблица 7.1

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int 0\,dx = C$	8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$, где $\alpha \neq -1$ любое конечное число	9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	10. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$	11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	12. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	13. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	14. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
	15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

Таблица 7.2

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$

2. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$ («высокий» логарифм)

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ («длинный» логарифм)

4. $\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2 \pm x^2\right| + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a > 0$

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 - x^2} + C$

7. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C,\ a > 0$

8. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Наша ближайшая цель — выяснить основные правила неопределенного интегрирования и на их основе исследовать некоторые классы элементарных функций, для которых первообразные являются конечными комбинациями также элементарных функций.

7.2. Основные правила неопределенного интегрирования

Прежде всего отметим связь между неопределенным интегралом и первым дифференциалом, которая выражается формулами:

1) $\int dF(x) = F(x) + C$ или, что то же, $\int F'(x)dx = F(x) + C$;

2) $d\int f(x)dx = f(x)dx$ или, что то же, $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$.

Обе формулы являются непосредственными следствиями понятий неопределенного интеграла и первого дифференциала (напомним, что $dy = y'(x)dx$).

Правило 1 (вынесение константы за знак интеграла):

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx,\ \alpha \text{ — любое число.} \tag{7.2}$$

Правило 2 (интеграл от суммы равен сумме интегралов):

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \tag{7.3}$$

Правило 3 (интегрирование по частям). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда

$$\int f(x)g'(x)dx = -\int f'(x)g(x)dx + f(x)g(x) \tag{7.4}$$

или в дифференциалах

$$\int f(x)dg(x) = -\int g(x)df(x) + f(x)g(x).$$

Правило 4 (замена переменной). Пусть $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – дифференцируемая функция переменного t. Тогда

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt, \tag{7.5}$$

при этом в правой части формулы (7.5) переменная t должна быть выражена через x, исходя из замены $x = \varphi(t)$.

Замечание. Отметим, что в каждом из равенств (7.2)—(7.5) речь идет о равенстве множеств функций, а именно множеств первообразных, отличающихся друг от друга на постоянную величину. Поэтому для проверки формул (7.2)—(7.5) достаточно убедиться в том, что производные от левой и правой частей этих формул тождественно равны между собой на интервале (a, b).

После этого наблюдения легко видеть, что сформулированные правила интегрирования являются следствиями известных правил дифференцирования.

Рассмотрим, например, формулу (7.2). Имеем

1) $\frac{d}{dx}(\int \alpha f(x)dx) = \alpha f(x)$ — производная левой части.

С другой стороны, учитывая, что константа выносится за знак производной, получим

2) $\frac{d}{dx}\left(\alpha\int f(x)dx\right) = \alpha\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = \alpha f(x)$ — производная правой части. Производные левой и правой частей, очевидно, равны, и формула (7.2) доказана, т.е. константу можно выносить за знак интеграла.

Из формулы (7.3) (она доказывается аналогично) следует, что интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждого слагаемого.

Наконец, формула интегрирования (7.4) отражает правило дифференцирования произведения функций, а формула (7.5) — правило дифференцирования сложной функции (см. 6.1).

Пример 7.3.

$$\int 18\sqrt{x}dx = 18\int \sqrt{x}dx = 18\int x^{1/2}dx = 18\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + C = 12x\sqrt{x} + C.$$

Пример 7.4.

$$\int\left(2\sin x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \int 2\sin x dx - \int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int \sin x dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= 2\int \sin x dx - \frac{1}{2}\int x^{-1/2}dx = -2\cos x - \sqrt{x} + C.$$

Пример 7.5. Интеграл $\int x\cos x dx$ вычислим, используя формулу интегрирования по частям (7.4). Для этого заметим, что $\cos x = (\sin x)'$ и, следовательно, интеграл можно записать в виде

$$\int x\cos x\, dx = \int x(\sin x)'dx.$$

Очевидно, полагая $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$, по формуле (7.4) будем иметь

$$\int x\cos x\, dx = \int x(\sin x)'dx = -\int \sin x\, dx + x\sin x$$

и дело свелось к табличному интегралу от функции $\sin x$. Окончательно

$$\int x\cos x dx = \cos x + x\sin x + C.$$

Формула замены переменной (7.5) является одним из наиболее сильных инструментов вычисления неопределенных интегралов. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 7.6. Получим вначале простое обобщение табличной формулы

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1,$$

а именно докажем, что при любых $a \neq 0$ и произвольных b

$$\int (ax+b)^{\alpha} dx = \frac{1}{a(\alpha+1)} (ax+b)^{\alpha+1} + C. \tag{7.6}$$

Для этого сделаем замену $ax + b = t$, или, что то же самое, $x = \frac{1}{a}(t-b)$. Тогда, учитывая, что при такой замене $dx = \frac{1}{a} dt$, из формулы (7.5) получаем, что

$$\int (ax+b)^{\alpha} dx = \int t^{\alpha} \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} \int t^{\alpha} dt = \frac{1}{a(\alpha+1)} t^{\alpha+1} + C.$$

Возвращаясь от переменной t к исходной переменной x, получаем искомую формулу.

Пример 7.7. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-1}$. Сделаем замену $x = t^3$ (избавляемся от кубического корня). Тогда $dx = 3t^2 dt$, а $\sqrt[3]{x} = t$. По формуле (7.5) имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-1} = \int \frac{3t^2 dt}{t-1} = 3\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1} dt =$$

$$= 3\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = 3\left(\frac{t^2}{2} + t + \int \frac{dt}{t-1}\right). \tag{7.7}$$

Последний интеграл также вычисляется с помощью замены $u = t - 1$. Тогда $du = dt$ и, значит,

$$\int \frac{dt}{t-1} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|t-1| + C.$$

Тем самым из (7.7) находим

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-1} = 3(t^2 + t + \ln|t-1|) + C,$$

откуда, возвращаясь к переменной x по формуле $\sqrt[3]{x} = t$, получаем окончательный ответ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-1} = 3(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + \ln|\sqrt[3]{x}-1|) + C.$$

В заключение отметим, что при нахождении неопределенных интегралов от более сложных функций полезно использовать современные математические пакеты, в частности пакет MAPLE (см. прил.), с помощью которых находятся первообразные рациональных функций, тригонометрических выражений, биномиальных дифференциалов Чебышева.

7.3. Задача нахождения площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл

В этом подразделе вводится основное понятие интегрального исчисления функции одной вещественной переменной, а именно понятие определенного интеграла.

Рассмотрим вначале задачу о нахождении площади криволинейной трапеции.

Пусть $y = f(x)$ — функция, определенная на некотором отрезке $[a, b]$. Пусть, кроме того, функция $f(x)$ неотрицательна, т.е. $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$. Тогда ее график определяет плоскую фигуру S, изображенную на рис. 7.1, которая называется *криволинейной трапецией*.

Поставим перед собой задачу найти площадь этой фигуры.

Эта задача распадается на две. Именно, необходимо, во-первых, выяснить, что называть площадью S, и, во-вторых, указать способ вычисления этой площади. Обе эти задачи решаются одновременно с помощью процесса «бесконечно малых разбиений», называемого *процессом интегрирования функции* $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и состоящего в следующем (рис. 7.2).

Пусть n — натуральное число и

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b, \qquad (7.8)$$

$(l \leq i \leq n)$ — произвольно взятый набор точек на отрезке $[a, b]$. Очевидно, точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ определяют разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Выберем на каждом «малом» отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i (т.е. $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$) и составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (7.9)$$

где $f(\xi_i)$ — значения $f(x)$ в выбранных «средних» точках ξ_i; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длины отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. Сумма (7.9) называется интегральной суммой для функции $f(x)$.

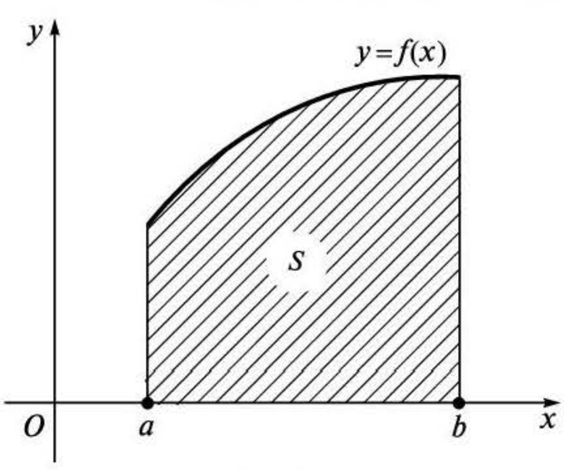


Рис. 7.1

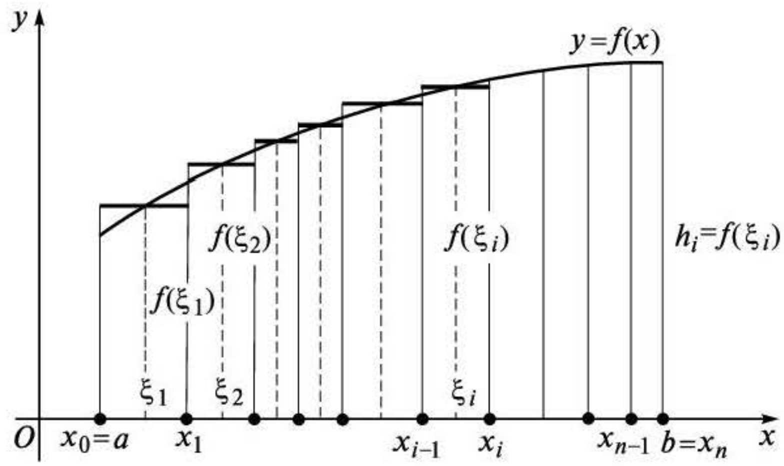


Рис. 7.2

Поскольку произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ и высотой $h_i = f(\xi_i) \geq 0$, то интегральная сумма σ_n равна площади ступенчатой трапеции, образованной этими прямоугольниками (см. рис. 7.2).

Из рисунка видно, что при достаточно мелком разбиении (7.8) площадь этой ступенчатой трапеции можно принять в качестве приближенного значения площади исходной криволинейной трапеции S, причем точность приближения будет тем лучше, чем мельче будет разбиение отрезка $[a, b]$ точками x_0, x_1, ..., x_n. Поэтому, если в процессе неограниченного измельчения разбиений отрезка $[a, b]$ последовательность σ_n будет стремиться к некоторому предельному значению σ, то это число естественно назвать площадью криволинейной трапеции S, т. е. по определению положить пл. $S = \sigma$ или, что то же, пл. $S = \lim \sigma_n$.

Тем самым получен ответ на поставленный в начале задачи вопрос о том, что называется площадью криволинейной трапеции S.

Замечание. Отметим, что хотя приведенное определение площади S интуитивно ясно, оно является еще недостаточно строгим. Это объясняется тем, что интегральные суммы σ_n зависят не только от номера n, но и от выбора точек разбиения x_0, x_1, ... x_n, а также от выбора средних точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Поэтому заранее неясно, получится ли значение площади S одним тем же числом при различных разбиениях отрезка $[a, b]$ и выборе точек ξ_i, $i = 1$, ..., n.

Требуют математического пояснения и слова «в процессе неограниченного измельчения разбиений отрезка $[a, b]$».

Чтобы исключить неопределенности, дадим строгое определение площади криволинейной трапеции S. Для этого введем число

$$\lambda_n = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i,$$

которое, очевидно, равно максимальной длине отрезков разбиения Δx_1, ..., Δx_n.

Определение 7.3. Площадью криволинейной трапеции S называется число $\sigma \geq 0$, удовлетворяющее следующему условию: для любого сколь угодно малого $\varepsilon \geq 0$ найдется число δ (зависящее от ε) такое, что при любом выборе разбиения отрезка $[a, b]$, лишь бы оно удовлетворяло неравенству $\lambda_n < \delta$, и любом выборе точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, выполняется неравенство

$$\left|\sigma - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < \varepsilon.$$

Это число σ и принимается в качестве площади криволинейной трапеции S, т.е.

$$\text{пл.}\, S = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{7.10}$$

С другой стороны, предел интегральных сумм, стоящий в правой части формулы (7.10), называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, т.е. по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{7.11}$$

и тем самым

$$\text{пл.}\, S = \int_a^b f(x)\,dx \tag{7.12}$$

(не забываем, что здесь $f(x) \geq 0$).

Ясно, что, отвлекаясь теперь от исходной задачи нахождения площади криволинейной трапеции S (тем самым от условия $f(x) \geq 0$), можно принять формулу (7.11) в качестве формулы для вычисления определенного интеграла в случае произвольной функции $f(x)$. Именно, фактически повторяя определение 7.3, приведем другое определение.

Определение 7.4. *Определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ называется число, обозначаемое символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, которое удовлетворяет условию:

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ (зависящее от ε) такое, что при любом выборе разбиения отрезка $[a, b]$, лишь бы оно удовлетворяло неравенству $\lambda_n < \delta$, и любом выборе точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, выполняется неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < \varepsilon.$$

Важность понятия определенного интеграла (и, в частности, его связь с неопределенным интегралом) будет раскрыта в следующих подразделах, а сейчас на некоторое время вернемся к задаче нахождения площади криволинейной трапеции S и заметим следующее.

С помощью формулы (7.10) [или, что то же, формула (7.12)] можно вычислить площадь S, однако непосредственное вычисление значения как самих интегральных сумм

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

так и их предела весьма затруднительно и на практике возможно только в условиях проведения вычислительного процесса на компьютере. Поэтому одной из целей интегрального исчисления является разработка простых методов вычисления определенных интегралов, минуя их прямое определение. В дальнейшем это будет сделано и тем самым формулы (7.10), (7.12) наполнятся практическим содержанием.

В заключение сделаем еще одно замечание.

Замечание. До настоящего момента всюду предполагалось, что $a < b$. В дальнейшем полезно использовать определенный интеграл и при $a > b$, полагая в этом случае по определению

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

7.4. Основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем

В этом подразделе рассмотрим некоторые классы функций, от которых существует определенный интеграл, и установим ряд основных свойств, включая теорему о среднем.

Начнем с простых наблюдений о том, что далеко не от каждой функции существует определенный интеграл или, что то же, далеко не каждая функция интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Прежде всего заметим, что неограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ не может быть интегрируемой на этом отрезке.

Действительно, если функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a, b]$, то при любом разбиении отрезка $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

она будет неограниченной хотя бы на одном из отрезков разбиения $[x_0, x_1]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. Пусть (для определенности) она не ограничена на первом отрезке $[x_0, x_1]$, т.е. принимает на $[x_0, x_1]$ сколь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Если считать числа a_{ij} и b_i известными, а x_1, x_2, ..., x_n — неизвестными, то система соотношений превращается в систему линейных алгебраических уравнений. Следовательно, любую такую систему можно записать в виде матричного уравнения (неизвестной является матрица X) $AX = B$.

Такая форма записи системы линейных алгебраических уравнений называется *матричной* формой.

Пример 2.5. Рассмотрим еще один случай, когда матрица A является квадратной (размером $m \times m$) матрицей специального вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

а $B = \| b_{ij} \|$ — произвольная матрица, имеющая m строк. Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

т. е. получилось, что $AB = B$. Если теперь умножить произвольную матрицу C, имеющую m столбцов, на матрицу A, то получится

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} \end{pmatrix},$$

т. е. опять имеем, что $CA = C$. Можно показать, что матрица A ведет себя как единица при умножении чисел: $1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = 5$. Поэтому эту матрицу называют *единичной* матрицей порядка m и обозначают E_m.

Итак, E_m — это квадратная матрица размером $m \times m$ (употребляют также термин «квадратная матрица порядка m»), имеющая вид:

угодно большие значения. Тогда ясно, что и интегральная сумма σ_n, которую запишем в виде

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

также может принимать сколь угодно большие значения за счет выбора точки ξ_1 в первом слагаемом.

Это означает, что последовательность σ_n не может иметь какое-либо число σ своим пределом в смысле определения 7.4 (т.е. независимо от выбора средних точек ξ_i), что и означает неинтегрируемость функции $f(x)$.

Таким образом, установлено, что ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ является необходимым условием ее интегрируемости по этому отрезку. Иначе доказано следующее утверждение.

Утверждение 7.1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Однако, как показывает нижеследующий пример функции Дирихле, условие ограниченности функции отнюдь не является достаточным для ее интегрируемости.

Пример 7.8. Рассмотрим функцию Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in [a, b] \text{ рационально;} \\ 0, \text{ если } x \in [a, b] \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Эта функция, будучи, очевидно, ограниченной на отрезке $[a, b]$, не интегрируема.

Действительно, пусть

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i,\ n = 1, 2, \ldots$$

— последовательность интегральных сумм этой функции. Очевидно, что на любом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ имеются как рациональные, так и иррациональные точки. Поэтому, если все точки $\xi_i = [x_{i-1}, x_i]$ взять рациональными, то получится $\sigma_n = b - a$. Если же, напротив, взять все точки ξ_i иррациональными, то получится $\sigma_n = 0$. Видим, что при одном выборе средних точек ξ_i сумма $\sigma_n \equiv b - a \to b - a$, а при другом — $\sigma_n \equiv 0 \to 0$ при $\lambda_n \to 0$. Это и значит, что функция $D(x)$ неинтегрируема на отрезке $[a, b]$.

Замечание. Понятно, что определенный интеграл от функции $D(x)$ не существует по той причине, что она слишком разрывна, более точно — разрывна в каждой точке отрезка $[a, b]$.

В результате возникает естественный вопрос о выявлении условий, достаточных для существования определенного интеграла. Сформулируем на этот счет ряд утверждений.

Утверждение 7.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она интегрируема на этом отрезке.

Утверждение 7.3. Пусть функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$. Тогда она интегрируема на этом отрезке.

Утверждение 7.4. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на нем за исключением конечного числа точек разрыва первого рода α_1, ..., α_N, находящихся на этом отрезке. Тогда $f(x)$ интегрируема как на всем отрезке $[a, b]$, так и на каждом подотрезке $[a, \alpha_1]$, $[\alpha_1, \alpha_2]$, ..., $[\alpha_N, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\alpha_1} f(x)dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \ldots + \int_{\alpha_{N-1}}^{\alpha_N} f(x)dx + \int_{\alpha_N}^{b} f(x)dx.$$

Перейдем теперь к основным свойствам определенных интегралов.

Свойство 1. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда при любом числе α функция $\alpha \cdot f(x)$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$, причем

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$$

(постоянный множитель выносится за знак интеграла).

Свойство 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда сумма (или разность) $f(x) \pm g(x)$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$, причем

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \tag{7.13}$$

(интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов).

Свойство 3 (интегрирование неравенств).

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и, кроме этого, связаны неравенством $f(x) \le g(x)$ для любого x из $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Свойство 4. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда функция $|f(x)|$ тоже интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{7.14}$$

(модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля).

Свойства 1—3, а также сама формула (7.14) легко вытекают из аналогичных свойств интегральных сумм. Остановимся, например, на доказательстве свойства 2.

Доказательство. Действительно, пусть

$$\sigma_n(f \pm g) = \sum_{i=1}^{n} \left[f(\xi_i) \pm g(\xi_i) \right] \Delta x_i$$

— интегральная сумма для функции $f(x) \pm g(x)$. Очевидно, что

$$\sigma_n(f \pm g) = \sigma_n(f) \pm \sigma_n(g). \tag{7.15}$$

По условию, при стремлении параметра разбиения λ_n к нулю

$$\sigma_n(g) \to \int_a^b g(x)dx \quad \text{и} \quad \sigma_n(f) \to \int_a^b f(x)dx.$$

Следовательно, из (7.15) немедленно получаем существование предела $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} \sigma_n(f \pm g)$, который по определению равен определенному интегралу $\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx$. Переходя к пределу в равенстве (7.15), получаем требуемую формулу. ▲

Свойство 5. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, тогда для любого значения c из этого отрезка функция $f(x)$ будет интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{7.16}$$

И наоборот, если $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема по отрезку $[a, b]$, причем справедлива формула (7.16).

Замечание. Формула (7.16) в случае $f(x) \geq 0$ выражает геометрически очевидный факт: площадь криволинейной трапеции S_a^b равна сумме площадей S_a^c и S_c^b. (рис. 7.3).

В заключение установим одно из самых значительных свойств определенного интеграла, называемое *теоремой о среднем.*

Теорема 7.2. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Тогда найдется хотя бы одна точка ξ из отрезка $[a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a). \tag{7.17}$$

Доказательство. Поскольку $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она принимает на этом отрезке свои максимальное и минимальное значения (M и m соответственно). Поэтому для любой точки x из отрезка $[a; b]$ можно записать двустороннее неравенство

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Интегрируя это неравенство (см. свойство 3), получаем, что

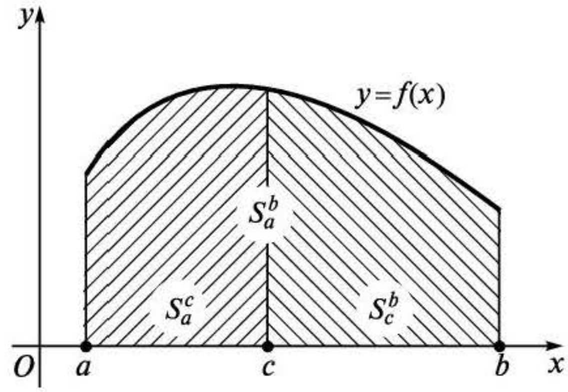


Рис. 7.3

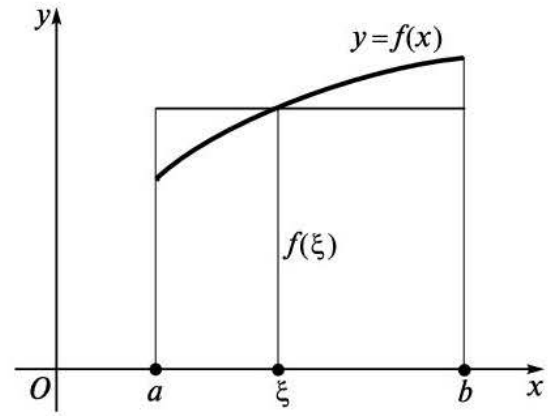


Рис. 7.4

$$m\int_a^b 1dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b 1dx$$

или, что то же,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

ибо очевидно, что $\int_a^b 1dx = b - a$ (площадь прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой 1).

Запишем последнее неравенство в виде

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M \tag{7.18}$$

и заметим, что число $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ в силу (7.18) является промежуточным значением между максимальным и минимальным значениями функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. По теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции найдется хотя бы одна точка ξ из отрезка $[a,b]$, в которой $f(x)$ примет значение μ, т.е. хотя бы в одной точке ξ из $[a,b]$

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Это и есть искомая формула (7.17). ▲

Замечание. В случае $f(x) \ge 0$ теорема о среднем, а точнее формула (7.17) имеет простой геометрический смысл (рис. 7.4): площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = b$ и функцией $f(x)$, равна площади некоторого прямоугольника с высотой $f(\xi)$ и основанием $(b-a)$.

7.5. Формула Ньютона—Лейбница

В этом подразделе доказывается основная формула интегрального исчисления — формула Ньютона—Лейбница, являющаяся главным инструментом для нахождения определенных интегралов. Выводу этой формулы предшествует изучение свойств специальной первообразной функции $f(x)$.

7.5.1. Определенный интеграл как функция верхнего предела

Пусть $f(x)$ — интегрируемая на $[a, b]$ функция. Выберем произвольную точку t из $[a, b]$ и рассмотрим интеграл

$$\int_a^t f(x)dx.$$

Геометрически, как нам известно из 7.1, в случае неотрицательной функции это — площадь криволинейной трапеции, образованной функцией $f(x)$ на участке $[a, t]$ (рис. 7.5).

Ясно, что при изменении точки t меняется и интеграл, т. е. он определяет функцию точки верхнего предела. Обозначим ее через

$$S(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Поскольку для аргумента, меняющегося на вещественной оси, принято обозначение x, то заменим t на x, а переменную интегрирования x на любую другую букву, например вновь на t. Тогда имеем

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Оказывается, что для непрерывной функции $f(x)$ функция $S(x)$ является ее первообразной. Именно, справедлива следующая теорема.

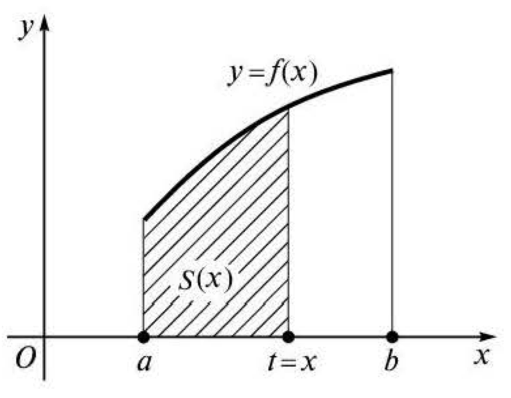


Рис. 7.5

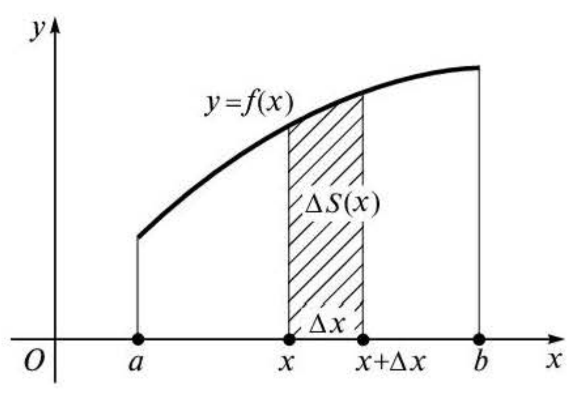


Рис. 7.6

Теорема 7.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $S(x)$ дифференцируема на этом отрезке, причем $S'(x) = f(x)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что всякая непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ является интегрируемой, поэтому $S(x)$ определена на всем $[a, b]$. Покажем, что в каждой точке из $[a, b]$ функция $S(x)$ имеет производную.

Действительно, пусть

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$$

— приращение функции $S(x)$ при приращении аргумента Δx. Очевидно (рис. 7.6), что

$$\Delta S(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \qquad (7.19)$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по теореме о среднем (см. теорему 7.2) найдется точка $\xi \in [x, x + \Delta x]$, такая, что

$$\Delta S(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(\xi),\ \xi \in [x, x + \Delta x]. \qquad (7.20)$$

Так как $f(x)$ непрерывна в точке x, то при $\Delta x \to 0$ будем иметь $f(\xi) \to f(x)$ (ясно, что при $\Delta x \to 0$ средние точки $\xi \to x$). Тем самым из (7.20) немедленно получаем, что и $\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} \to f(x)$. Это по определению и значит, что функция $S(x)$ дифференцируема в точке x, причем ее производная в этой точке равна $f(x)$. Поскольку точка x выбрана произвольным образом из отрезка $[a, b]$, то теорема доказана. ▲

Замечание. Формулу $S'(x) = f(x)$ часто записывают в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

и читают: «производная интеграла по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в точке верхнего предела».

Этот результат имеет большое значение в теории интегрирования — он показывает, что любая непрерывная функция имеет первообразную (хотя эту первообразную часто невозможно выразить в элементарных функциях).

7.5.2. Вывод формулы Ньютона—Лейбница

Теорема 7.4 (Формула Ньютона—Лейбница). Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — какая-либо ее первообразная функция. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{7.21}$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. Так как $S(x)$ — тоже первообразная $f(x)$, то найдется константа C такая, что $F(x) + C = S(x)$ для всех x из $[a, b]$. Поскольку это равенство справедливо в любой точке отрезка, то возьмем в качестве x точку a. Если учесть, что $S(a) = 0$, то можно получить, что $C = -F(a)$. Тем самым это равенство записывается в виде

$$S(x) = F(x) - F(a),$$

или, учитывая определение $S(x)$, в виде

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Теперь осталось только положить x, равным b. ▲

Замечание. При практических вычислениях разность $F(b) - F(a)$ обычно записывают короче, как $F(x)|_a^b$.

Формула (7.21) является основным инструментом, позволяющим находить значения определенных интегралов, минуя непосредственное суммирование интегральных сумм, поскольку дело сводится к отысканию первообразных, т.е. к неопределенному интегрированию.

Пример 7.9. Вычислить площадь криволинейной трапеции, образованной функцией $y = x^3$ на участке от 0 до 2 (рис. 7.7).

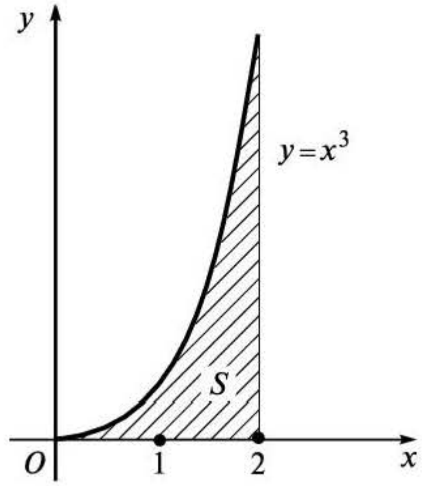


Рис. 7.7

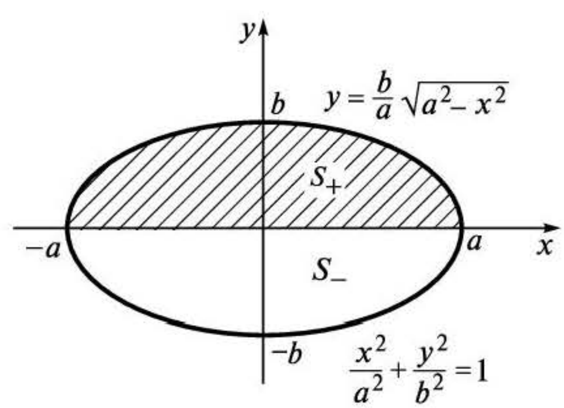


Рис. 7.8

Имеем

$$S = \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{2^4}{4} = 4.$$

Пример 7.10. Найти площадь эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 7.8).

Очевидно, искомая площадь S является удвоенной площадью криволинейной трапеции S_+, образованной верхним контуром эллипса, который задается уравнением $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Имеем (см. табл. 7.2)

$$S = 2S_+ = 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2} = 2\frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= 2\frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\arcsin 1 - \frac{a^2}{2}\arcsin(-1)\right] = ab\cdot 2\arcsin 1 = ab\cdot 2\frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

Отметим, что при $a = b = R$ имеем площадь окружности πR^2.

7.6. Интегрирование по частям и замена переменных в определенном интеграле

Теорема 7.5. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a, b]$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \qquad (7.22)$$

Доказательство. Формула дифференцирования произведения

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

означает, что функция $f(x)g(x)$ является первообразной функции $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$, следовательно, по формуле (7.21) — формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b [f'(x)g(x) + g'(x)f(x)]\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

или, что то же,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx + \int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b. \ \blacktriangle$$

Замечание. Формула (7.22) записывается также в дифференциалах, а именно в виде

$$\int_a^b f(x)dg(x) = -\int_a^b g(x)df(x) + g(x)f(x)\Big|_a^b.$$

Обратимся к формуле замены переменной.

Теорема 7.6. Пусть выполнены условия:

1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема, определена на отрезке $[c,d]$ и принимает значения из $[a, b]$;

3) $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$.

Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f[\varphi'(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (7.23)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$, тогда по формуле Ньютона—Лейбница

$$\frac{dF[\varphi(t)]}{dt} = F'_\varphi[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t),\ t \in [c, d].$$

Это означает, что функция $F[\varphi(t)]$ как функция переменной t является первообразной функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ на отрезке $[c, d]$. Следовательно, вновь по формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_c^d f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)]\Big|_c^d = F[\varphi(d)] - F[\varphi(c)] = F(b) - F(a), \quad (7.24)$$

ибо по условию $\varphi(d) = b$, $\varphi(c) = a$. Сравнивая (7.24) и (7.21), очевидно получаем формулу (7.23). ▲

Пример 7.11. Вычислить $\int_1^e x \ln x\,dx$.

По формуле интегрирования по частям

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \int_1^e \ln x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = -\int_1^e \frac{x}{2}\,dx + \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e = -\frac{x^2}{4}\Big|_1^e + 0{,}5e^2 = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

Пример 7.12. Вычислить $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$.

Имеем

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx = \left(\text{замена } t = \cos x,\ \frac{x = 0 \leftrightarrow t = 1}{x = \pi/4 \leftrightarrow t = \sqrt{2}/2}\right) = \int_1^{\sqrt{2}/2}\left(-\frac{dt}{t}\right) =$$

$$= -\ln|t|\Big|_1^{\sqrt{2}/2} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

7.7. Приложения определенного интеграла

В этом подразделе приведен ряд приложений определенного интеграла к различным геометрическим задачам.

7.7.1. Вычисление площади плоской фигуры

Как известно из 7.3, в случае неотрицательной функции $f(x)$ определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим теперь более общий случай трапеции, образованной двумя функциями $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, причем $\varphi(x) \le \psi(x)$ при $a \le x \le b$ (рис. 7.9).

Очевидно, в этом случае

$$\text{пл.}\, S = \int_a^b \left[\psi(x) - \varphi(x)\right] dx. \tag{7.25}$$

Пример 7.13. Вычислить площадь фигуры S, образованной пересечением параболы $y = x^2$ и прямой $y = 2x$.

Очевидно, парабола $y = x^2$ и прямая $y = 2x$ пересекаются в точках $x = 0$ и $x = 2$. Следовательно, искомая фигура есть криволинейная трапеция $S = \{0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x\}$.

Используем формулу (7.25), полагая $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 2x$,

$$\text{пл.}\, S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Весьма удобно вычислять площадь плоских фигур, заданных в полярных координатах r, φ.

Пусть плоская фигура S задана системой полярных неравенств, а именно S есть совокупность точек плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют неравенствам $\alpha \le \varphi \le \beta$, $r_0(\varphi) \le r \le r_1(\varphi)$, где α, β — неотрицательные числа; $r_0(\varphi)$, $r_1(\varphi)$ — непрерывные, или, более обще, интегрируемые, функции переменного φ (рис. 7.10).

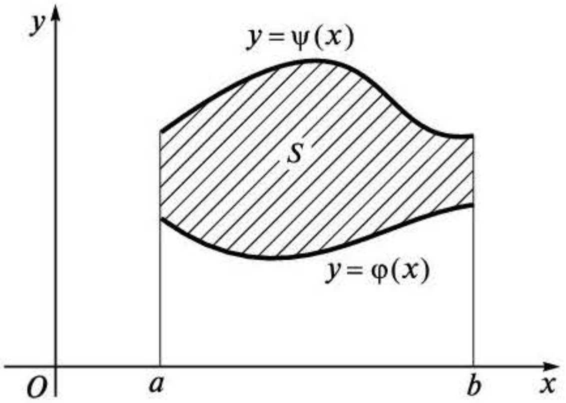


Рис. 7.9

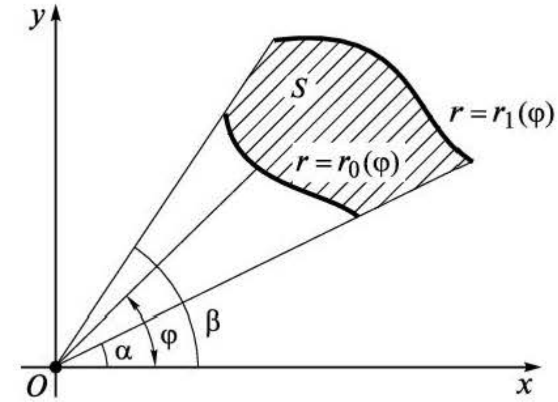


Рис. 7.10

$$E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

По диагонали, идущей слева вниз направо, именуемой *главной* диагональю, стоят единицы, а все остальные элементы матрицы равны нулю.

Для любой квадратной матрицы F порядка m будет справедливым равенство $E_mF = FE_m = F$.

Пример 2.6. В этом примере покажем, что даже тогда, когда существуют матрицы AB и BA, они, как правило, различны. Бывают случаи, когда они совпадают, и в этом случае говорят, что матрицы A и B *перестановочны*. Это бывает довольно редко. Возьмем в качестве матриц A и B следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда $AB = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, а $BA = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Свойства операции умножения матриц отличаются от аналогичных свойств операции умножения чисел именно тем, что результат умножения матриц зависит от того, в каком порядке они умножаются:

1) $AB \neq BA$ (вообще говоря, не равны);

2) $A(B + C) = AB + AC$ и $(B + C)A = BA + CA$;

3) $(AB)C = A(BC)$.

Справедливость свойства 1 видна из примера 2.6. Свойства 2 и 3 могут быть без особых затруднений доказаны исходя из определений равенства двух матриц и произведения матриц. Докажем, например, свойство 2:

$$A(B + C) = \left\| \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{m} a_{ik} c_{kj} \right\| = AB + AC. \blacktriangle$$

Аналогично доказывается, что $(B + C)A = BA + CA$, а также свойство 3.

2.2. Определители матриц

2.2.1. Основные определения

Если A — квадратная матрица порядка n, то с ней можно связать число, называемое *определителем* матрицы A и обозначаемое через $|A|$. В некоторых учебниках можно встретить другой термин:

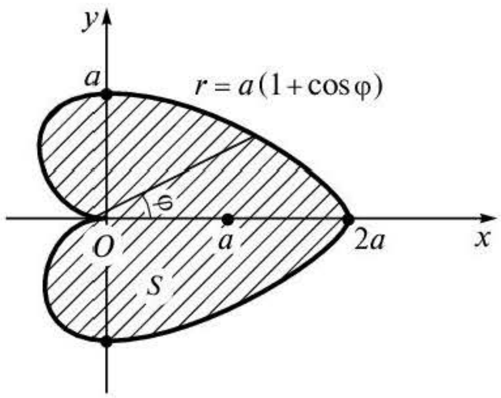


Рис. 7.11

В этом случае площадь S вычисляется по формуле

$$\text{пл. } S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[r_1^2(\varphi) - r_0^2(\varphi)\right]d\varphi. \quad (7.26)$$

Пример 7.14. Вычислить площадь кардиоиды, полярные уравнения которой имеют вид $r = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (рис. 7.11).

Применяем формулу (7.26) [здесь $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, $r_1(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$, $r_0(\varphi) = 0$]:

$$\text{пл. } S = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[2\pi + 2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi + \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[2\pi + 2\pi(\sin 2\pi - \sin 0) + \pi + \frac{1}{4}(\sin 2\pi - \sin 0)\right] = \frac{3}{2}a^2.$$

7.7.2. Вычисление длины кривой

Пусть Γ — кривая, являющаяся графиком функции $y = f(x)$, $a \le x \le b$ (рис. 7.12).

Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, т.е. она имеет производную $f'(x)$, которая непрерывна на $[a, b]$. В этом случае длина кривой Γ (обозначим ее l) вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \quad (7.27)$$

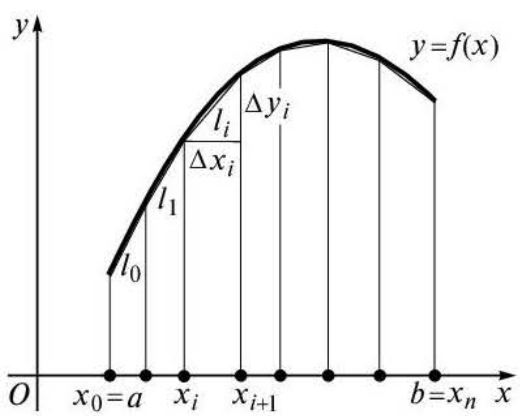


Рис. 7.12

Выведем эту формулу методом бесконечно малых разбиений аналогично тому, как вычисляли площадь криволинейной трапеции (см. 7.3).

Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, $\lambda_n = \max\Delta x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Заменим приближенно кривую Γ кусочно-линейной кривой, состоящей из малых хорд, соединяющих точки $(x_i, y_i) \in \Gamma$, где $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n-1$. Тогда длина кривой Γ приближенно равна длине построенной таким образом кусочно-линейной кривой, т.е. $l \approx \sum_{i=0}^{n-1} l_i$, где l_i — длина хорды на участке $[x_i, x_{i+1}]$. Очевидно, по теореме Пифагора

$$l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{\Delta x_i^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2}. \qquad (7.28)$$

Поскольку функция $f(x)$ имеет непрерывную производную, по теореме о среднем Лагранжа (см. теорему 6.5)

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f'(\xi_i)\Delta x_i,$$

где ξ_i — некоторые точки, находящиеся на отрезках $[x_i, x_{i+1}]$.

Тогда из (7.28) получаем, что $l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$ и, следовательно,

$$l \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i. \qquad (7.29)$$

Очевидно, правая часть формулы (7.29) есть интегральная сумма для функции $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ на отрезке $[a, b]$. Так как по предположению функция $f'(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то и функция $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ также непрерывна на отрезке $[a, b]$ и, значит, интегрируема.

Тем самым при $\lambda_n \to 0$ в формуле (7.29) правая часть имеет предел, равный определенному интегралу $\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$. Это и приводит к формуле (7.27). Вывод завершен.

Если кривая Γ задана в *параметрической форме*, т.е.

$$\Gamma = \{(x, y) \colon x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ 0 \le t \le T\},$$

то ее длина вычисляется по формуле

$$l = \int_0^T \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \qquad (7.30)$$

Если кривая Γ задана *полярным уравнением* $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то ее длина вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

Пример 7.15. Вычислить длину астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (рис. 7.13).

Запишем уравнение астроиды в параметрической форме

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$$

(параметр t играет роль угла, образованного радиусом-вектором $r = \{x, y\}$ с осью Ox).

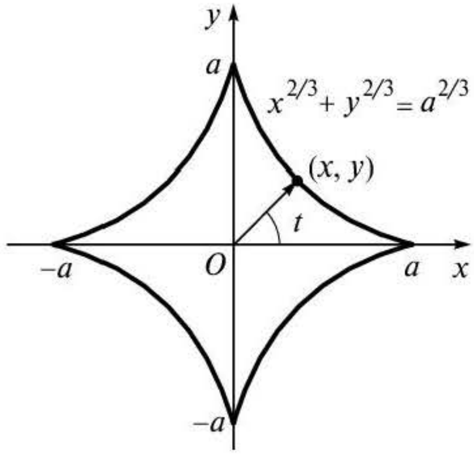


Рис. 7.13

Тогда по формуле (7.30)

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)dt} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)}dt =$$

$$= 3a\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}dt = 3a\int_0^{2\pi} |\cos t \sin t| dt =$$

$$= \frac{3}{2}a\int_0^{2\pi} |\sin 2t|\, dt. \qquad (7.31)$$

Очевидно, функция $y = |\sin 2t|$ является периодической с периодом $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\int_0^{2\pi} |\sin 2t|\, dt = 4\int_0^{\pi/2} |\sin 2t|\, dt = 4\int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -2(\cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \cos 0) = 4.$$

Таким образом, из (7.31) следует, что длина астроиды $l = 6a$.

7.7.3. Вычисление объема и площади поверхности тел вращения

Рассмотрим тело, полученное вращением криволинейной трапеции $S = \{(x, y)\colon a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$ вокруг оси Ox (рис. 7.14).

Объем V полученного тела вращения определяется формулой

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx, \qquad (7.32)$$

а поверхность вращения σ по формуле

$$\sigma = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \qquad (7.33)$$

Обе формулы выводятся также методом бесконечно малых разбиений. Получим, например, формулу (7.32) для объема.

Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Рассечем объем V набором плоскостей $x = x_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$), перпендикулярных оси Ox. Если разбиение достаточно мелкое, т.е. $\lambda_n = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$ достаточно мало, то в получившейся «нарезке» малый слой можно считать лежащим горизонтально цилиндром высотой $h_i = \Delta x_i$ и радиусом $r_i = f(\xi_i)$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ — некоторая средняя точка. Тогда объем данного слоя равен

$$V_i = \pi r_i^2 h_i = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i,$$

а полный объем тела вращения

$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ясно, что величина справа есть интегральная сумма для функции $\pi f^2(x)$ на отрезке $[a, b]$. Поэтому при $\lambda_n \to 0$ получаем искомую формулу

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

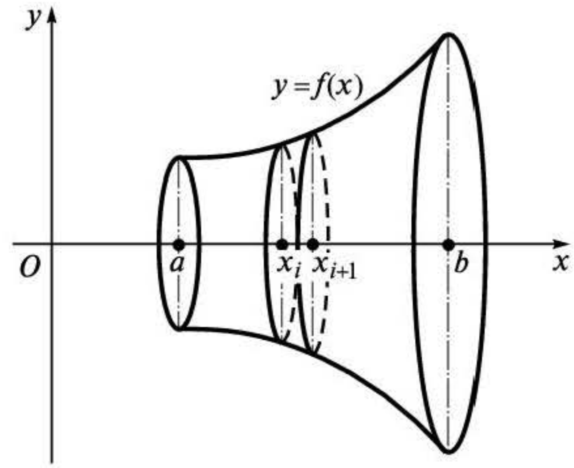


Рис. 7.14

Пример 7.16. Вычислить объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $0 \le y \le \sin x$, $0 \le x \le \pi$.

Имеем

$$V = \pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi \cdot \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

7.8. Несобственные интегралы

До сих пор рассматривались определенные интегралы по конечному промежутку $[a, b]$. На практике, однако, часто необходимо интегрировать функции, заданные на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$. Такие интегралы называются *несобственными интегралами* и обозначаются символом $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Дадим строгое определение несобственного интеграла.

7.8.1. Определение несобственного интеграла

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная на полуоси $[a, +\infty)$, где a — некоторое число (рис. 7.15).

Рассмотрим определенный интеграл

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

как функцию верхнего предела $b > a$ (см. рис. 7.15) (геометрически функция $\Phi(b)$ выражает заштрихованную площадь криволинейной трапеции на участке $[a, b]$). Устремим теперь b к $+\infty$. Очевидно, возможны два варианта: функция $\Phi(b)$ либо имеет конечный предел, либо не имеет.

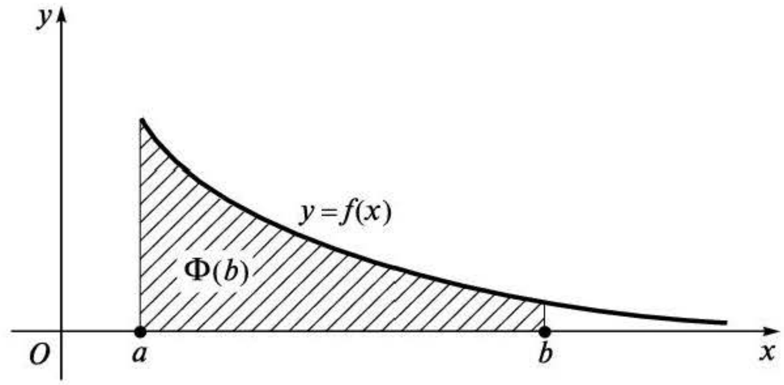


Рис. 7.15

Определение 7.5. Если функция $\Phi(b)$ имеет при $b \to \infty$ конечный предел, то этот предел называется *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$. Коротко

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

В этом случае говорят также, что функция $f(x)$ интегрируема на полуоси $[a, +\infty)$ в несобственном смысле, а несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называют *сходящимся.*

Если же предел функции $\Phi(b)$ не существует или он бесконечен, то функцию $f(x)$ называют неинтегрируемой на полуоси $[a, +\infty)$, а сам несобственный интеграл — *расходящимся.*

Пример 7.17. Выяснить, сходится или расходится несобственный интеграл $I = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx.$

По определению,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-(e^{-b} - e^0)\right) = \lim_{b\to+\infty} (1 - e^{-b}) = 1,$$

так как $e^{-b} \to 0$ при $b \to +\infty$.

Значит, интеграл I существует, причем $I = 1$. Геометрически это означает, что площадь бесконечной трапеции, расположенной под графиком экспоненты $y = e^{-x}$, $x > 0$, равна единице.

Пример 7.18. Выяснить, при каких значениях $s > 0$ несобственный интеграл $I(s) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}dx$ сходится, а при каких — расходится.

Имеем (вначале при $s \neq 1$)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \lim_{x\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^s} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-s} \frac{1}{x^{s-1}}\Bigg|_{x=1}^{x=b} = \frac{1}{1-s} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{b^{s-1}} - 1\right] =$$

$$= \left\{ \frac{1}{s-1} \text{ при } s > 1; +\infty \text{ при } s < 1 \right\}.$$

Таким образом, исходный интеграл $I(s)$ сходится при $s > 1$ и расходится при $s < 1$.

Остается рассмотреть случай $s = 1$. В этом случае

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty,$$

т. е. интеграл расходится. Итак,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \{\text{сходится, если } s > 1; \text{ расходится, если } s \le 1\}.$$

Заметим, что полученный результат будет использован далее при изучении числовых рядов.

Переходим к некоторым общим вопросам теории несобственных интегралов, первоочередным из которых является вопрос сходимости или расходимости несобственного интеграла.

В рассмотренных примерах нам удалось ответить на этот вопрос прямыми вычислениями, при этом сделать даже больше — точно вычислить значение несобственного интеграла. Часто, однако, точное значение несобственного интеграла вычислять нет необходимости, а нужен только сам факт сходимости или расходимости несобственного интеграла. При ответе на этот вопрос важную роль играют теоремы, называемые теоремами сравнения.

7.8.2. Теоремы сравнения

Теорема 7.7 (первая теорема сравнения). Пусть даны две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на полуоси $[a, +\infty)$, причем выполнены два условия:

1) $f(x) \le g(x)$, при $x \ge a$;

2) $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится.

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится.

Теорема 7.8 (вторая теорема сравнения). Пусть $f(x)$, $g(x)$ — две неотрицательные функции на полуоси $[a, \infty)$, причем выполнены два условия:

1) $f(x) \le g(x)$, при $x \ge a$;

2) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.

Тогда $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ также расходится.

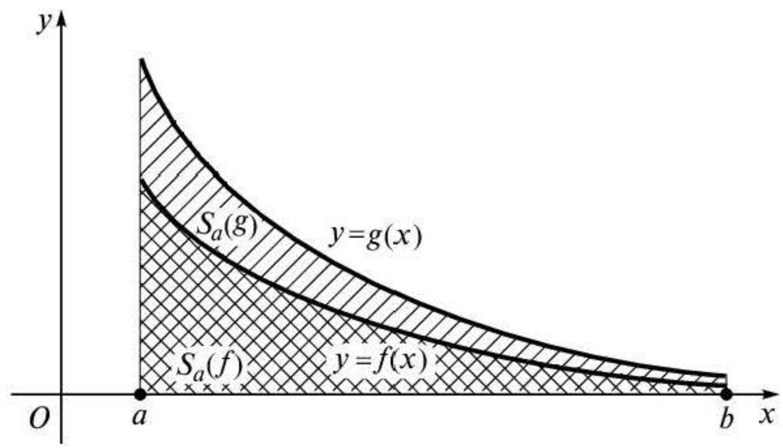


Рис. 7.16

Замечание. Коротко приведенные теоремы сравнения гласят: если несобственный интеграл от большей функции $g(x)$ сходится, то и от меньшей функции $f(x)$ интеграл также сходится. И наоборот, если интеграл от меньшей функции расходится, то интеграл и от большей функции также расходится.

Подчеркнем, что в теоремах сравнения речь ведется только о неотрицательных функциях, т. е. $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$. (Для функций любого знака теоремы сравнения, вообще говоря, не имеют смысла.)

Ограничимся интуитивным геометрическим доказательством (рис. 7.16) сформулированных теорем.

Как известно, величина

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

равна площади криволинейной трапеции $S_b(f)$, образованной функцией $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$. Поэтому несобственный интеграл, если он существует, естественно считать площадью бесконечной трапеции на участке $[0, +\infty)$, т.е.

$$S_\infty(f) = \lim_{b \to +\infty} S_b(f) \tag{7.34}$$

или, что то же,

$$S_\infty(f) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если же предел (7.34) бесконечен, т.е. несобственный интеграл расходится, то площадь соответствующей криволинейной трапеции бесконечна.

Ясно, что если $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \geq a$, то график функции $y = f(x)$ лежит ниже графика функции $y = g(x)$ и поэтому площади соответствующих трапеций связаны неравенством $S_\infty(f) \leq S_\infty(g)$.

Поэтому если площадь $S_\infty(g)$ конечна, т.е. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то и площадь $S_\infty(f)$ также конечна, т.е. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится. Напротив, если $S_\infty(f) = +\infty$, т.е. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то и площадь $S_\infty(g) = +\infty$, т.е. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ также расходится. ▲

Пример 7.19. Выяснить, сходится или расходится интеграл $I = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \operatorname{arctg} x\,dx$.

Применим первую теорему сравнения. Для этого прежде всего отметим, что при $x \geq 0$ функция $f(x) \equiv \mathrm{e}^{-x}\operatorname{arctg} x$ неотрицательна, так как $\mathrm{e}^{-x} > 0$ при всех x, а $\operatorname{arctg} x \geq 0$ при $x \geq 0$. Далее, поскольку $\operatorname{arctg} x < \dfrac{\pi}{2}$ при всех $x > 0$, то $\mathrm{e}^{-x} \operatorname{arctg} x \leq \dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-x}$ и можно применить первую теорему сравнения, полагая $f(x) \equiv \mathrm{e}^{-x}\operatorname{arctg} x$, $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Поскольку функция $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ интегрируема на $[0,+\infty]$ (см. пример 7.17), то интегрируема и функция $f(x)$, т.е. исследуемый интеграл I сходится.

Пример 7.20. Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{2+\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$. Очевидно, что подынтегральная функция $\dfrac{2+\sin x}{\sqrt{x}}$ положительная, так как $|\sin x| < 1$.

Более того,

$$\frac{2+\sin x}{\sqrt{x}} \geq \frac{2-|\sin x|}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Как известно (см. пример 7.18), интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится.

По второй теореме сравнения получаем, что и исходный несобственный интеграл также расходится.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Зная, что $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, докажите, что $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Аналогично поставьте и решите задачу для функций $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$.

2. Пусть $F(x)$ — первообразная $f(x)$, т.е. для неопределенного интеграла имеет место формула

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Рассмотрим функцию $f(ax + b)$, где a и b — произвольные числа, причем $a \neq 0$.

Докажите справедливость формулы

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

3. (Это задача-шутка.) Студенту требуется найти неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,dx.$$

Он заглядывает в ответ и делает замену u = ответ. (Такую замену студенты зовут «универсальной».) К чему сведется решение задачи?

4. Формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$, не конкретизирует выбор этой первообразной.

Объясните, почему при выборе различных конкретных первообразных функции $f(x)$ результат всегда будет один и тот же.

5. Рассмотрим определенный интеграл с переменным верхним пределом

$$F(x) \equiv \int_0^{\varphi(x)} f(t)dt,$$

где $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция, а $f(t)$ — непрерывная функция.

Выведите формулу

$$F'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

Рассмотрите пример функции

$$F(x) = \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2} dx.$$

6. Пусть функция $f(x)$ четна, т.е. для любого $x \in \mathbf{R}^1$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

Докажите, что при любом $a > 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

7. Пусть функция $f(x)$ нечетна, т.е. для любого $x \in \mathbf{R}^1$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

Докажите, что при любом $a > 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

8. Вычислите площадь плоских фигур, образованных пересечением параболы и прямой:

1) $y = x(2 - x)$, $y = x$;
2) $y = (x - 2)^2$, $y = 4x - 8$.

9. Вычислите длину дуги следующих кривых:

1) параболы $y = \frac{1}{2}x^2$, $0 \le x \le 2$;
2) цепной линии $y = \operatorname{ch} x$, $-1 \le x \le 1$;
3) циклоиды (заданной в параметрической форме)

$$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

10. Вычислите, исходя из определения, сходятся или расходятся несобственные интегралы:

1) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$; 2) $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$; 3) $\int\limits_1^{\infty} x e^{-x} dx$; 4) $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{2 - x}}$; 5) $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{(x - 1)^2}$; 6) $\int\limits_0^{1} \operatorname{ctg} x\, dx$.

детерминант матрицы A и соответствующее ему обозначение $\det(A)$. Естественно, что определитель матрицы зависит от всех ее элементов, и если какой-то элемент изменить, то определитель, вообще говоря, изменится. Таким образом, определитель представляет собой функцию от n^2 аргументов. Эта функция, записанная в виде формулы, уже при $n > 3$ представляет собой очень громоздкое выражение. Поэтому ее использование для вычисления определителя нерационально. Это можно сделать гораздо успешнее, если изучить его свойства.

Если $A = \|a_{ij}\|$, $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, то определитель матрицы A обозначают как матрицу, взятую в прямые скобки:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

При $n = 1$, $A = (a_{11})$ и по определению полагаем $|A| = a_{11}$; при $n = 2$ — $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$; при $n = 3$ — $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Как видим, с ростом n громоздкость формул, дающих выражение определителя через элементы матрицы A, возрастает.

Для того чтобы понять, что из себя представляет определитель n-го порядка (так называют определитель, матрица которого имеет порядок n), необходимо познакомиться с таким понятием, как *перестановка*.

Если имеется множество из n элементов, то его всегда можно сделать *упорядоченным*, или, как еще говорят, ввести отношение порядка, когда про любые два элемента однозначно решается вопрос, какой из них первый, а какой второй. Этот факт можно обозначить так: если из двух элементов α и β первым является α, то пишут $\alpha \prec \beta$. Например, если это множество n различных чисел, то естественным отношением порядка будет сравнение их по величине. Первым считается то из двух чисел, которое меньше.

Но возможны и другие способы введения отношения порядка. Эти способы должны подчиняться некоторым правилам, на которых не будем останавливаться. Если имеется множество M из n различных элементов, то будем считать его упорядоченным следующим способом: все элементы записаны в виде последовательности $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$, которая и определяет, какой элемент из двух — i_k или i_l — первый. Если $k < l$, то первым является i_k. Если $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ — действительные числа, будем считать, что эта последовательность выбрана так, чтобы при $k < l$ выполнялось неравенство $i_k < i_l$, т.е.

ГЛАВА 8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность

В случае одной вещественной переменной изучались функции, определенные на интервале или отрезке. В случае многих переменных множество областей определения функций гораздо богаче, поэтому начнем с рассмотрения примеров основных областей. При этом в основном будем рассматривать двумерный и трехмерный случаи, поскольку они весьма наглядны.

Пусть R^2 — плоскость переменных x, y, т.е. множество всех точек $M(x, y)$ с двумя координатами. Примерами областей на плоскости являются следующие множества.

Пример 8.1. Множество

$$U_R = \{M(x, y) \in R^2_{x,y} \text{ таких, что } x^2 + y^2 < R^2\}$$

называется *кругом* радиусом $R > 0$ с центром в начале координат. Обратим внимание на то, что граница круга, т.е. окружность радиусом R, не включается в круг. Такой круг называется *открытым*. Открытые круги U_R при разных $R > 0$ называются *окрестностями точки* $(0, 0)$.

Ясно, что аналогичным образом можно определить окрестности любой точки $M_0(x_0, y_0)$ как множества

$$U_R = \{M(x, y) \in R^2_{x,y} \text{ таких, что } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\}.$$

Пример 8.2. *Открытым прямоугольником* (или прямоугольником без границы) называется множество $B = \{M(x, y)\colon a < x < b,\ c < y < d\}$, где $a < b$ и $c < d$ — некоторые числа.

В трехмерном пространстве R^3 переменных x, y, z аналогичными областями являются:

а) *шар*

$$U_R(M_0) = \{M(x, y, z) \in R^3_{x,y,z}\colon (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < R^2\}$$

радиусом $R > 0$ и центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

б) *параллелепипед*

$$B = \{M(x, y, z) \in R^3_{x,y,z}\colon a < x < b,\ c < y < d,\ l < z < m\},$$

где $a < b$, $c < d$, $l < m$ — некоторые числа.

Читатель без труда самостоятельно приведет примеры других областей G как в $R_{x,y}^2$, так и в $R_{x,y,z}^3$.

Переходим к функциям двух переменных x, y.

Определение 8.1. Функцией двух переменных с областью определения G называется отображение f, сопоставляющее каждой точке $M \in G$ число u, и которое обозначается $u = f(M)$.

Подчеркнем, что рассматриваются только однозначные отображения f, т.е. отображения, сопоставляющее каждой точке M только *одно* значение $u = f(M)$.

Далее, поскольку каждая точка M на плоскости определяется двумя координатами (x, y), то функцию $u = f(M)$ чаще обозначают как $u = f(x, y)$, подчеркивая ее зависимость от двух переменных x, y.

Аналогично определяется функция трех переменных (x, y, z).

Пусть $M_0 = M_0(x_0, y_0)$ — фиксированная точка G, а $M_n = M(x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — последовательность точек в области G. Будем говорить, что последовательность M_n стремится к M_0 при $n \to \infty$ (и обозначать $M_n \to M_0$), если $x_n \to x_0$, а $y_n \to y_0$. Будем писать также $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Следующие два определения аналогичны тем, что были даны в случае одного переменного.

Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, исключая, быть может, саму точку $M_0(x_0, y_0)$.

Определение 8.2. Число b называется *пределом функции* $u = f(x, y)$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$, если для любой последовательности $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, $n = 1, 2, \ldots$ ($x_n \neq x_0$, $y_n \neq y_0$ одновременно), соответствующая числовая последовательность $u_n = f(x_n, y_n) \to b$.

В соответствии с этим определением принято обозначать

$$b = \lim_{x, y \to x_0, y_0} f(x, y) \quad \text{или} \quad b = \lim_{M \to M_0} f(M).$$

Ясно, что для введенного понятия предела функции двух переменных справедливы те же свойства, что и для одномерного случая, названные «арифметическими» свойствами пределов (см. теорему 5.1). Приведем эти свойства в виде формул, оставляя читателю строгие формулировки и доказательства по аналогии с одномерным случаем.

Теорема 8.1. Имеют место формулы:

1) $\lim\limits_{x, y \to x_0, y_0} [Cf(x, y)] = C \lim\limits_{x, y \to x_0, y_0} f(x, y)$, C — постоянная;

2) $\lim\limits_{x, y \to x_0, y_0} [f(x, y) \pm g(x, y)] = \lim\limits_{x, y \to x_0, y_0} f(x, y) \pm \lim\limits_{x, y \to x_0, y_0} g(x, y)$;

3) $\lim\limits_{x, y \to x_0, y_0} [f(x, y) g(x, y)] = \lim\limits_{x, y \to x_0, y_0} f(x, y) \lim\limits_{x, y \to x_0, y_0} g(x, y)$;

4) $\lim\limits_{x, y \to x_0, y_0} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{\lim\limits_{x, y \to x_0, y_0} f(x, y)}{\lim\limits_{x, y \to x_0, y_0} g(x, y)}$.

Пример 8.3. Покажем, что $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$.

Действительно, пусть $x_n\to 0$ и $y_n\to 0$ произвольным образом, лишь бы $x_n\neq 0$ и $y_n\neq 0$ одновременно. Так как при любых значениях x и y справедливо неравенство

$$|xy|\leq\frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

то функция $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ удовлетворяет двустороннему неравенству

$$0\leq\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{4}\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$$

и, следовательно,

$$0\leq f(x_n,y_n)\leq\frac{1}{4}(x_n^2+y_n^2).$$

Отсюда немедленно следует при $x_n\to 0$ и $y_n\to 0$ и функция $f(x_n,y_n)\to 0$. Это и требовалось.

Пример 8.4. Выясним, существует ли $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Очевидно, функция $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ определена всюду, кроме точки $x_0=0$, $y_0=0$. Согласно определению предела, последовательность $u_n=f(x_n,y_n)$ должна стремиться к одному и тому же пределу b при любом стремлении к нулю последовательностей x_n и y_n. Однако в данном примере это не так. Действительно, если выбрать последовательность $x_n\to 0$ $(x_n\neq 0)$ и $y_n\equiv 0$, $n=1, 2, \ldots$, то

$$u_n=f(x_n,0)\equiv 0$$

и, следовательно, «вдоль оси Ox» значения $f(x_n, y_n)\to 0$. С другой стороны, если взять последовательность $x_n\to 0$ и $y_n\equiv x_n$, то

$$u_n=f(x_n,y_n)=\frac{x_n^2}{2x_n^2}=\frac{1}{2}$$

и, значит, вдоль прямой $y=x$ функция $f(x_n,y_n)\to\dfrac{1}{2}$.

Это указывает на то, что для рассматриваемой функции нашлись по крайней мере две различные последовательности $x_n\to 0$ и $y_n\to 0$, для которых последовательности значений $f(x_n, y_n)$ стремятся к различным пределам. Таким образом, $\lim\limits_{x,y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не существует.

Обратимся к понятию непрерывной функции двух переменных. Оно в точности такое же, что и для случая одной переменной.

Определение 8.3. Функция $u = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если она имеет предел при x, $y \to x_0$, y_0 и этот предел равен значению функции в этой точке.

Коротко, функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{x, y \to x_0, y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Для непрерывных функций нескольких переменных справедливы многие теоремы, которые были доказаны для случая одной переменной. К таким теоремам относятся, например, теоремы, выражающие «арифметические» свойства непрерывных функций, непрерывность сложной функции и другие результаты. Их формулировки дословно повторяют одномерный случай и поэтому не приводятся.

Остановимся на формулировках первой и второй теорем Вейерштрасса, которые понадобятся в дальнейшем.

Теорема 8.2 (первая теорема Вейерштрасса). Пусть $\bar{G}$ — ограниченная область в $R^2_{x,y}$ вместе со своей границей ($\bar{G}$ называется компактом в $R^2_{x,y}$). Если функция $f(x, y)$ непрерывна на компакте $\bar{G}$, то она ограничена на нем, т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что $|f(x, y)| \le C$ для любой точки $(x, y) \in \bar{G}$.

Теорема 8.3 (вторая теорема Вейерштрасса). Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция на компакте $\bar{G}$. Тогда она достигает на нем своих максимального и минимального значений.

Последнее означает, что найдется точка $(x_0, y_0) \in \bar{G}$ [точка абсолютного максимума $f(x, y)$] такая, что для всякой точки $(x, y) \in \bar{G}$ справедливо неравенство $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$. (Аналогично для наименьшего значения.)

В заключение отметим, что всякая точка, в которой функция $u = f(x, y)$ не является непрерывной, есть, по определению, точка разрыва этой функции. У функции двух переменных x, y множество точек разрыва бывает самым разнообразным. Например, функция

$$u = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

имеет единственную точку разрыва $x = 0$, $y = 0$. Функция

$$u = \frac{1}{x - y}$$

разрывна на всей прямой $y = x$.

Двумерная функция Хевисайда

$$\Theta(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ для } \ x > 0, \ y > 0, \\ 0, \text{ для всех остальных точек} \end{cases}$$

разрывна, очевидно, на полуосях $x \ge 0$, $y \ge 0$.

8.2. Частные производные. Дифференциал функции нескольких переменных

8.2.1. Частное дифференцирование. Понятие непрерывно дифференцируемой функции

Пусть $u = f(x, y)$ — функция двух переменных, определенная в некоторой области $G \subset R^2_{x,y}$. Пусть также (x, y) — фиксированная точка в этой области.

Дадим аргументу x приращение Δx, оставляя значение y неизменным. Иными словами, перейдем от точки (x, y) к точке $(x + \Delta x, y)$. Тогда функция $f(x, y)$ получит приращение

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

называемое *частным приращением функции* $f(x, y)$ по переменной x.

Определение 8.4. Пусть существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x, y)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Тогда этот предел называется *частной производной функции* $f(x, y)$ в точке (x, y) и обозначается символом $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$.

Коротко

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная по y:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Ясно, что частная производная $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ есть обычная производная функции $f(x, y)$ по x при фиксированном аргументе y, а частная производная $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ — обычная производная по y при фиксированном аргументе x.

Ввиду этого, практическое нахождение частных производных сводится к обычному дифференцированию по какой-либо переменной при условии, что все остальные переменные фиксированны, т. е. постоянны.

Пример 8.5. Вычислить частные производные функции $f(x, y) = x^2 y - y^3 + 1$.

Имеем

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^2 - 3y^2.$$

Пример 8.6. Вычислить частные производные функции $u = \ln r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\ln r)'_r \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2r^2} 2x = \frac{x}{r^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r^2}.$$

Замечание. Ясно, что значения частных производных функции $f(x, y)$ меняются от точки к точке, т.е. частные производные сами являются функциями переменных x, y.

От свойств частных производных (как функций x, y) существенно зависят и свойства самой функции $f(x, y)$.

В дальнейшем будем предполагать, что частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ существуют в каждой точке области G и, кроме того, непрерывны.

Определение 8.5. Функция $u = f(x, y)$ называется *непрерывно дифференцируемой* в области G, если выполнены два условия:

1) в каждой точке $(x, y) \in G$ существуют частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$;

2) эти частные производные непрерывны в области G.

В приведенных выше примерах 8.5 и 8.6 функции $u = x^2y - y^3 + 1$ и $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, очевидно, являются непрерывно дифференцируемыми каждая в своей области определения.

8.2.2. Дифференциал и его связь с приращением функции

Пусть функция $u = f(x, y)$ имеет в каждой точке области G производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Определение 8.6. *Дифференциалом функции* $u = f(x, y)$ в точке $(x, y) \in G$ называется выражение

$$du \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y,$$

где Δx и Δy — произвольные приращения x и y.

Ясно, что дифференциал функции $u = f(x, y)$ зависит не только от точки $(x, y) \in G$, но и от приращений Δx, Δy, которые придаются аргументам x и y (для краткости обозначений все эти величины не указываются).

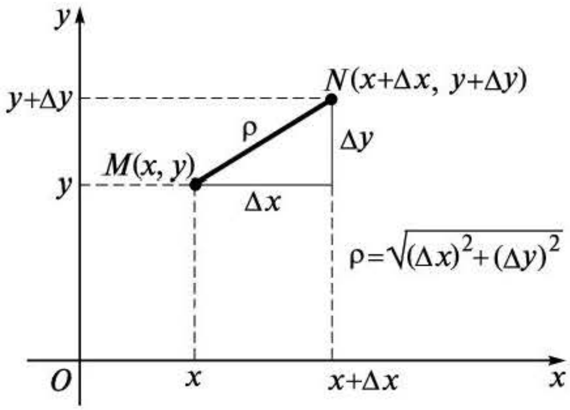


Рис. 8.1

Пример 8.7. Найти дифференциал функции $u = C$, где C — постоянная. Очевидно, что $du = 0$, т.е. дифференциал постоянной тождественно равен нулю в области G. Нетрудно показать и обратное: если дифференциал функции $u = f(x, y)$ равен нулю в каждой точке области G, то $u \equiv \text{const}$.

Пример 8.8. Найти дифференциал функции $u = \ln r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $x = 1$, $y = 2$ при приращениях $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = 0{,}5$. Имеем (см. пример 8.6)

$$du = \frac{x}{r^2}\Delta x + \frac{y}{r^2}\Delta y.$$

Следовательно,

$$du = \frac{1}{5}\cdot 0{,}1 + \frac{2}{5}\cdot 0{,}5 = 0{,}22 \text{ при } x = 1,\ y = 2,\ \Delta x = 0{,}1 \text{ и } \Delta y = 0{,}5.$$

Первостепенное значение понятия дифференциала связано с оценкой полного приращения функции $u = f(x, y)$. Именно, пусть $M(x, y) \in G$ — фиксированная точка. Дадим ей произвольное приращение $(\Delta x, \Delta y)$, т.е. перейдем к точке $N(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ (рис. 8.1).

Определение 8.7. *Полным приращением функции* $u = f(x, y)$ при переходе от точки $M(x, y)$ к точке $N(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ называется разность

$$\Delta n = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y).$$

Связь полного приращения функции с ее дифференциалом определяется следующей теоремой.

Теорема 8.4. Если функция $u = f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области G, то для любой точки $(x, y) \in G$ справедлива формула

$$\Delta u = du + o(\rho), \tag{8.1}$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ — расстояние между точками $N(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ и $M(x, y)$. (Напомним, что через $o(\rho)$ обозначается величина более высокого порядка малости, чем ρ, т.е. $\dfrac{o(\rho)}{\rho} \to 0$ при $\rho \to 0$.)

Доказательство. Запишем равенство (8.1) в развернутом виде

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y + o(\rho)$$

и рассмотрим более детально ее левую часть. Имеем

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \equiv$$

$$\equiv \left[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)\right] + \left[f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\right]. \quad (8.2)$$

Очевидно, разность, стоящая в первой квадратной скобке, есть частное приращение по x, так как вторая переменная равна $y + \Delta y$ в обоих слагаемых. Поэтому по теореме Лагранжа о среднем значении (см. теорему 6.5),

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y + \Delta y)\Delta x, \quad (8.3)$$

где $\xi \in (x, x + \Delta x)$ — некоторая средняя точка. Далее, поскольку по определению непрерывно дифференцируемой функции частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ непрерывна в области G [и, в частности, в рассматриваемой точке (x, y)], то

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y + \Delta y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$, так как в этом процессе, очевидно, средняя точка $\xi \to x$. Следовательно, разность

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad (8.4)$$

есть бесконечно малая величина в процессе $\rho \to 0$, т.е. $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\rho \to 0$.

В таком случае из (8.4) и (8.3) получаем

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \alpha(\Delta x, \Delta y),$$

где также $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Аналогично находим, что

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y),$$

где $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Подставляя полученные выражения в равенство (8.2), имеем

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

т.е.

$$\Delta u = du + \gamma(\Delta x, \Delta y), \quad (8.5)$$

где $\gamma(\Delta x, \Delta y) \equiv \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$.

Очевидно,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\gamma(\Delta x,\Delta y)}{\rho}\equiv\lim_{\rho\to 0}\left[\alpha(\Delta x,\Delta y)\frac{\Delta x}{\rho}+\beta(\Delta x,\Delta y)\frac{\Delta y}{\rho}\right]=0,$$

так как величины $\alpha(\Delta x,\ \Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\ \Delta y)$ суть бесконечно малые, а величины $\frac{\Delta x}{\rho}$ и $\frac{\Delta y}{\rho}$ ограничены единицей. Это означает, что $\gamma(\Delta x,\Delta y)=$ $=o(\rho)$. Тем самым формула (8.5) и дает искомое соотношение (8.1). ▲

Таким образом, установили, что полное приращение всякой непрерывно дифференцируемой функции $u=f(x,y)$ отличается от ее дифференциала du на бесконечно малую величину $o(\rho)$ более высокого порядка малости, чем $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Поскольку дифференциал du есть линейная функция по переменным Δx и Δy, это указание существенно, ибо иначе сравнивать бесконечно малые величины, которыми являются сами Δu и du, не имеет смысла.

Формулу (8.1), как и в одномерном случае, можно рассматривать как формулу приближенного вычисления значений функции $f(x,y)$ в точке $N(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$, а именно

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y. \qquad (8.6)$$

Поэтому, если в некоторой «опорной» точке $M(x,y)$ известны значения функции и ее частных производных, то формула (8.6) позволяет найти значение функции в точке $N(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$, причем приближение будет тем качественнее, чем ближе смещенная точка к опорной, т.е. чем меньше $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

8.2.3. Правила частного дифференцирования

Частное дифференцирование производится по тем же формулам, что использовались для функций одной переменной (дифференцирование сумм, произведения и частного). Что же касается формул дифференцирования сложной функции, то здесь правила похожие, но иные.

Рассмотрим сложную функцию

$$u(t)=f[x(t),y(t)],$$

где $f(x,y)$ — заданная функция двух переменных x и y, которые в свою очередь являются функциями переменного t. В итоге сложная функция (8.6) есть функция одного переменного t.

Теорема 8.5. Пусть функция $f(x,y)$ является непрерывно дифференцируемой как функция двух независимых переменных x и y, а функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы по t. Тогда функция $u(t)$ дифференцируема по t и ее производная вычисляется по формуле

$$u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\left[x(t), y(t)\right] x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left[x(t), y(t)\right] y'(t). \qquad (8.7)$$

Пример 8.9. Найти производную функции $u(t) = \mathrm{e}^{x^2}\cos y$, где $x = 1 - t^3$, $y = t^2$. Очевидно, функция $u(t)$ является сложной функцией вида (8.6), где $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2}\cos y$.

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\mathrm{e}^{x^2}\cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\mathrm{e}^{x^2}\sin y.$$

Следовательно, по формуле (8.7),

$$u'(t) = \left(2x\mathrm{e}^{x^2}\cos y\right)\left(1 - t^3\right)' - \left(\mathrm{e}^{x^2}\sin y\right)\left(t^2\right)' =$$

$$= \left(2x\mathrm{e}^{x^2}\cos y\right)\left(-3t^2\right) - \left(\mathrm{e}^{x^2}\sin y\right)2t$$

(здесь $x = 1 - t^3$, $y = t^2$).

Столь же часто приходится сталкиваться со сложными функциями вида

$$u(t,\tau) = f(x, y), \text{ где } x = x(t,\tau),\ y = y(t,\tau).$$

В этом случае частные производные $u(t,\tau)$ по t и τ вычисляются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}.$$

Доказательство этих формул здесь не приводим.

8.3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $F(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемая функция трех переменных, т.е. функция, имеющая непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)$ и $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)$. Для удобства обозначим эти производные символами $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$ и $F'_z(x, y, z)$.

Как известно, уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (8.8)$$

описывает в трехмерном пространстве $R^3_{x,y,z}$ некоторую поверхность S (рис. 8.2).

Ставится задача — определить и написать уравнение плоскости, касающейся поверхности S в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Прежде всего определим, какую плоскость естественно назвать касательной плоскостью к поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

набор из n различных чисел упорядочен естественным способом: с помощью сравнения по величине ($\alpha \prec \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha < \beta$).

Теперь запишем последовательность из n различных элементов не в правильном, а в произвольном порядке $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, ..., i_{\alpha_n}$. Например, при $n = 5$, вместо последовательности i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 рассмотрим последовательность i_3, i_1, i_5, i_2, i_4. Она состоит из тех же элементов, что и «правильная» последовательность, но записанных в «неправильном» порядке.

Определение 2.5. Множество всевозможных последовательностей из n различных фиксированных элементов $i_1, i_2, i_3, ..., i_n$ называется множеством *перестановок* из этих n элементов, а элементы этого множества — *перестановками.*

Пример 2.7. Пусть $n = 3$; $i_1 = 1$; $i_2 = 5$; $i_3 = 7$. Множество перестановок из этих трех чисел состоит из шести элементов: (1, 5, 7), (1, 7, 5), (5, 1, 7), (5, 7, 1), (7, 1, 5), (7, 5, 1).

Количество перестановок с увеличением числа n довольно быстро возрастает. Можно подсчитать, что число всех перестановок из n элементов равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1)n$ (читается «эн факториал»). Например, если $n = 5$, то $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, при $n = 10$: $10! = 3\,628\,800$. Рассмотрим произольную перестановку, например, при $n = 3$ (7, 1, 5). Если взять в ней произвольную пару чисел, например, 7 и 5, то эти числа стоят в неправильном порядке: число 5 меньше чем 7, а стоит правее него. Этот «беспорядок» называется *инверсией*, которую образует пара чисел 7 и 5. Еще одну инверсию образует пара 7 и 1, а пара 1 и 5 инверсии не образует. Таким образом, в приведенном примере перестановка (7, 1, 5) содержит две инверсии. Если сосчитать число инверсий в другой перестановке, например, в (5, 1, 7), то окажется, что это число равно единице. Следовательно, в разных перестановках число инверсий может быть различным.

Определение 2.6. Перестановка называется *четной*, если она содержит четное число инверсий, и *нечетной* — в противном случае.

Утверждение. Если в перестановке поменять местами два элемента, то четность перестановки изменится: если она была четной, то станет нечетной, и наоборот, если она была нечетной, то станет четной.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда переставляемые элементы расположены рядом. Тогда, если они образовывали инверсию, то после перестановки эта инверсия исчезнет, а если не образовывали инверсии, то теперь она появится. Инверсии, которые образуют эти два элемента с другими элементами, при такой перестановке не пострадают, их число останется прежним. Следовательно, общее число инверсий либо уменьшится на единицу, либо увеличится. А это означает, что четность числа инверсии в любом случае изменится.

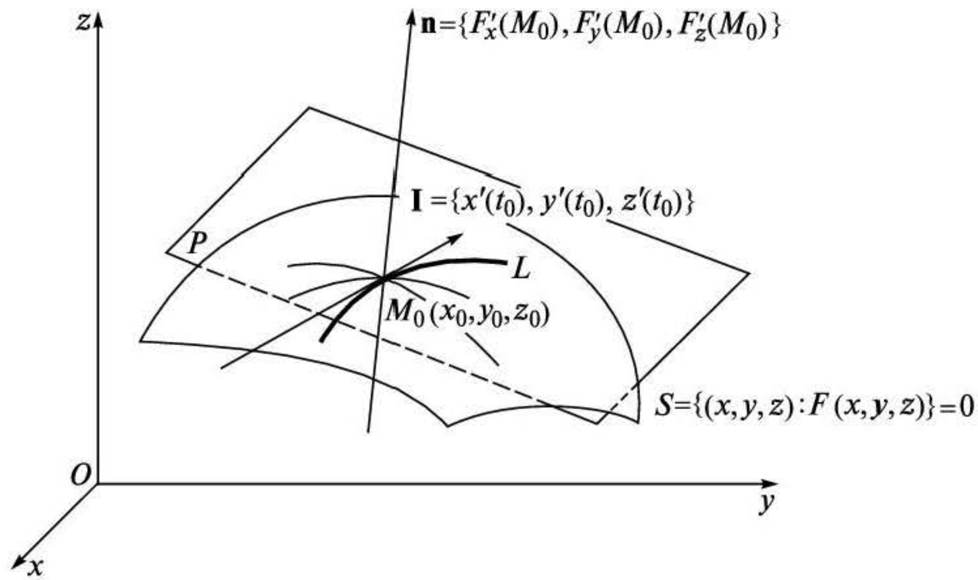


Рис. 8.2

Для этого выберем произвольную кривую L, лежащую на поверхности S и проходящую через точку M_0.

Пусть кривая L описывается параметрическими уравнениями

$$L = \{(x, y, z): x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\},$$

где t — вещественный параметр.

Поскольку кривая L целиком находится на поверхности S, определяемой уравнением (8.8), то при всех значениях t

$$F[x(t), y(t), z(t)] \equiv 0. \tag{8.9}$$

[В частности, при некотором значении $t = t_0$ точка кривой $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ является точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, т. е. $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$]. Дифференцируя тождество (8.9) по t [см. формулу (8.7)], получаем

$$F'_x[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t) + F'_y[x(t), y(t), z(t)]\,y'(t) + F'_z[x(t), y(t), z(t)]\,z'(t) = 0.$$

В частности, при $t = t_0$ имеем

$$F'_x(M_0)x'(t_0) + F'_y(M_0)y'(t_0) + F'_z(M_0)z'(t_0) = 0. \tag{8.10}$$

Это равенство можно, очевидно, записать в виде скалярного произведения векторов

$$(\mathbf{n}, \mathbf{l}) = 0, \tag{8.11}$$

где $\mathbf{n} = \{F'_x(M_0),\ F'_y(M_0),\ F'_z(M_0)\}$ — вектор, называемый *градиентом* функции $F(x, y, z)$, $\mathbf{l} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ — вектор, *касательный* к кривой L в точке M_0.

Из равенства (8.11) следует, что касательный вектор $\mathbf{l}$ ортогонален вектору-градиенту $\mathbf{n}$.

Заметим теперь, что кривая L была выбрана совершенно произвольно, поэтому касательные векторы ко всевозможным кривым на S, проходящим через точку M_0, ортогональны одному и тому же вектору-градиенту и тем самым лежат в одной плоскости. Ее-то и примем (по определению) в качестве касательной плоскости P.

Итак, *касательной плоскостью* к поверхности S в точке M_0 называется плоскость, проходящая через точку M_0 и ортогональная вектору

$$\mathbf{n} = \{F_x'(M_0),\ F_y'(M_0),\ F_z'(M_0)\}.$$

Остается заметить следующее: из аналитической геометрии известно, что указанная плоскость P описывается уравнением

$$P\colon\ F_x'(M_0)(x - x_0) + F_y'(M_0)(y - y_0) + F_z'(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Уравнение соответствующей нормальной прямой N

$$N\colon\ \frac{x - x_0}{F_x'(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(M_0)}$$

(естественно, в обоих случаях требуется, чтобы хотя бы одно из чисел $F_x'(M_0)$, $F_y'(M_0)$, $F_z'(M_0)$ было отлично от нуля).

Замечание. Выпишем уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной явным уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in G$.

Ясно, что это частный случай рассмотренного общего уравнения $F(x, y, z) = 0$, если положить $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Тогда

$$\mathbf{n} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right\} \tag{8.12}$$

и, следовательно,

$$P\colon\ z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0);$$

$$N\colon\ \frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Пример 8.10. Написать уравнение касательной плоскости P и нормали N к поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{8.13}$$

в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на эллипсоиде.

Решение. Запишем уравнение (8.12) в виде

$$F \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Вычислим нормальный вектор **n**, т. е. вектор-градиент функции $F(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2} \right\}.$$

Следовательно, уравнение P имеет вид

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

или, что то же,

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} \right) = 0.$$

Так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности эллипсоида, то в силу уравнения (8.13) выражение в скобках равно единице, и уравнения касательной плоскости и нормали N принимают вид:

$$P\colon\ \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1;$$

$$N\colon\ a^2 \frac{x - x_0}{x_0} = b^2 \frac{y - y_0}{y_0} = c^2 \frac{z - z_0}{z_0}.$$

8.4. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

8.4.1. Частные производные высших порядков

До сих пор рассматривались частные производные первого порядка. Поскольку они также являются функциями многих переменных, то от первых частных производных можно еще раз найти частные производные. Получим частные производные второго порядка, которые обозначаются

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Продолжая этот процесс, можно получить частные производные любого порядка.

Пример 8.11. Найти частные производные второго порядка от функции $f(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y$.

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \sin y.$$

Вычисляя от полученных выражений еще раз частные производные по x и по y, находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{e}^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\mathrm{e}^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\mathrm{e}^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\mathrm{e}^x \cos y.$$

Обратим внимание на то, что смешанные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ тождественно равны, т.е. их значения оказались одинаковыми независимо от того, дифференцируем мы функцию $f(x, y)$ сначала по x, а затем по y, или наоборот. Это не случайно. Имеет место следующая теорема.

Теорема 8.6. Пусть функция $f(x, y)$ имеет в области G смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$, причем они непрерывны. Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \text{ в области } G.$$

Не останавливаясь на доказательстве этой теоремы, заметим, что аналогичные равенства имеют место и для производных любого порядка. Например,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \text{ и т.д.}$$

8.4.2. Дифференциалы высших порядков

Согласно определению первого дифференциала функции $u = f(x, y)$,

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\Delta y,$$

при этом дифференциал является функцией точки (x, y), в которой он вычисляется, и приращений Δx и Δy, выбираемых произвольно. Если приращения Δx и Δy не менять, то дифференциал $df(x, y)$ становится функцией только переменных x, y и от него можно вычислить вновь первый дифференциал при тех же Δx и Δy.

Определение 8.8. Дифференциалом второго порядка $d^2 f(x, y)$ называется дифференциал от первого дифференциала $df(x, y)$, т.е.

$$d^2 f(x, y) \equiv d\big(df(x, y)\big).$$

Далее

$$d^3 f(x, y) = d\big(d^2 f(x, y)\big) \text{ и т.д.}$$

Вычислим второй дифференциал подробнее. Согласно определению,

$$d^2 f(x, y) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\Delta y\right).$$

Так как Δx и Δy постоянны, то

$$d^2 f(x, y) = \left[d\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)\right]\Delta x + \left[d\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)\right]\Delta y =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Delta y\right]\Delta x + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y\right]\Delta y =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\,\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\,\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\,\Delta y^2, \quad (8.14)$$

поскольку $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \equiv \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

Символически первый и второй дифференциалы можно записать в виде:

$$df(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(x, y),$$

$$d^2 f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x, y).$$

Для придания смысла этим равенствам в первом случае надо просто после символа $\dfrac{\partial}{\partial x}$ поставить $f(x, y)$, во втором случае — возвести выражение в скобке в квадрат, считая по определению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},\ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

и затем опять поставить $f(x, y)$.

Нетрудно проверить, что для любого n

$$d^n f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x, y).$$

Пример 8.12. Вычислить дифференциал второго порядка от функции $f(x, y) = x^3 y^4$ в точке $x = 1$, $y = -1$.

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^4,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3 y^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x^2 y^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x^3 y^2.$$

В частности, в точке $x = 1,\ y = -1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12.$$

Следовательно,

$$d^2 f(1,-1) = 6\Delta x^2 - 24\Delta x \Delta y + 12\Delta y^2.$$

Отметим, что если первый дифференциал $df(x, y)$ есть линейная форма относительно приращений аргументов Δx и Δy, то второй дифференциал — квадратичная форма по Δx, Δy. Нетрудно видеть, что дифференциал n-го порядка есть полилинейная форма по Δx, Δy порядка n.

Аналогично вводятся дифференциалы для функций трех и более переменных.

8.4.3. Формула Тейлора

Вспомним вначале формулу Тейлора для функции одной вещественной переменной t в точке $t = 0$

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{1!}u'(0)t + \frac{1}{2!}u''(0)t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}u^{(n)}(0)t^n + r_n \qquad (8.15)$$

и запишем ее в дифференциалах

$$u(t) = u(t) + \frac{1}{1!}du(0) + \frac{1}{2!}d^2u(0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n u(0) + r_n.$$

(Здесь r_n — остаточный член формулы Тейлора, который, как мы доказали, есть $o(t^n)$.)

Именно в последней форме получим многомерную формулу Тейлора.

Теорема 8.7. Пусть функция $f(x, y)$ имеет в области G непрерывные частные производные до порядка $n + 1$ включительно. Тогда для любой точки $(x, y) \in G$ справедлива формула

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) =$$
$$= f(x, y) + \frac{1}{1!}df(x, y) + \frac{1}{2!}d^2 f(x, y) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x, y) + o(\rho^n),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. (Разумеется, приращения Δx и Δy таковы, что точки $x + \Delta x$ и $x + \Delta y$ находятся в области G, а точнее в некоторой окрестности точки (x, y), находящейся в области G.)

Доказательство. Зафиксируем точку $(x, y) \in G$, а также приращения Δx и Δy и рассмотрим функцию одной переменной $t \in [0, 1]$

$$u(t) = f(x + t\Delta x,\ y + t\Delta y).$$

Очевидно,

$$u(1) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y),\ u(0) = f(x, y).$$

Далее нетрудно видеть, что функция $u(t)$ имеет $n + 1$ непрерывную производную на отрезке $[0, 1]$. Действительно, по формуле (8.7), имеем

$$u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + t\Delta x, y + t\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x + t\Delta x, y + t\Delta y)$$

и, в частности,

$$u'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y = df(x, y).$$

Точно так же вычисляем, что

$$u''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x + t\Delta x, y + t\Delta y)\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + t\Delta x, y + t\Delta y)\Delta x \Delta y +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x + t\Delta x, y + t\Delta y)\Delta y^2$$

и, следовательно, $u''(0) = d^2 f(x, y)$.

И так далее, на n-м шаге получим, что $u^{(n)}(0) = d^n f(x, y)$.

Подставляя эти выражения в формулу (8.15), находим, что для любого $t \in [0, 1]$

$$u(t) = f(x, y) + \frac{1}{1!}df(x, y)t + \frac{1}{2!}d^2 f(x, y)t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x, y)t^n + r_n$$

В частности, при $t = 1$ получаем искомую *формулу Тейлора*

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) =$$

$$= f(x, y) + \frac{1}{1!}df(x, y) + \frac{1}{2!}d^2 f(x, y) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x, y) + r_n, \quad (8.16)$$

где r_n — остаточный член. Можно показать, что

$$r_n = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x + \tau\Delta x, y + \tau\Delta y)$$

при некотором $\tau \in (0, 1)$.

Так как исходная функция $f(x, y)$ по предположению имеет непрерывные частные производные до порядка $n + 1$, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|r_n| \le M(|\Delta x| + |\Delta y|)^{n+1},$$

или (что эквивалентно)

$$|r_n| \le M\rho^{n+1},$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Это неравенство указывает на то, что остаточный член есть бесконечно малая величина более высокого порядка, чем ρ^n, т.е. $r_n = o(\rho^n)$. ▲

Пример 8.13. Представить функцию $f(x, y) = \mathrm{e}^x \cos x$ в окрестности начала координат по формуле Тейлора второго порядка.

Имеем (с учетом того, что $x = \Delta x$, $y = \Delta y$)

$$f(0,0) = 1,\ df(0,0) = (\mathrm{e}^x \cos y)_{0,0}x + (\mathrm{e}^x \sin y)_{0,0}y = x;$$
$$d^2f(0,0) = (\mathrm{e}^x \cos y)_{0,0}x^2 + 2(\mathrm{e}^x(-\sin y))_{0,0}xy + (-\mathrm{e}^x \cos y)_{0,0}y^2 = x^2 - y^2.$$

Таким образом,

$$\mathrm{e}^x \cos y = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + o(\rho^2).$$

Замечание. Как и в одномерном случае, значение многомерной формулы Тейлора состоит в том, что функция $f(x, y)$ произвольной структуры приближенно представляется в виде простой элементарной функции, а именно многочлена, который называется *многочленом Тейлора*.

8.5. Экстремумы функции. Задача о наибольшем и наименьшем значениях

В этом подразделе изучим теорию экстремальных точек функции двух переменных, т.е. теорию локальных максимумов и минимумов, а также задачу о наибольшем и наименьшем значениях функции на компакте. В последнем случае предварительно необходимо исследовать задачу так называемого условного экстремума.

8.5.1. Необходимые условия экстремума

Начнем с определения точек экстремума функции и выяснения необходимых условий экстремума. Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в некоторой области G.

Определение 8.9. Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется *точкой локального максимума* функции $f(x, y)$, если найдется окрестность U точки (x_0, y_0) такая, что для любой точки $(x, y) \in U$ справедливо неравенство

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0).$$

Аналогично определяется точка локального минимума.

Определение 8.10. Точки локального максимума и точки локального минимума функции $f(x, y)$ называются ее *экстремальными точками*, или точками локального экстремума.

Наша основная цель — нахождение и исследование экстремальных точек заданной функции $f(x, y)$. Это и составляет содержание теории безусловного экстремума (или «просто экстремума»).

Теорема 8.8. (Необходимые условия экстремума.) Пусть $(x_0, y_0) \in G$ — точка локального экстремума функции $f(x, y)$. Если $f(x, y)$ имеет в этой точке частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, то они равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \tag{8.17}$$

Эти равенства и составляют необходимые условия экстремума дифференцируемой функции.

Доказательство. Рассмотрим функции одной переменной x, а именно функцию $\varphi(x) \equiv f(x, y_0)$, где y_0 — вторая координата точки локального экстремума (x_0, y_0). Очевидно, точка $x = x_0$ является экстремальной точкой функции $\varphi(x)$, причем точкой локального максимума или минимума в точном соответствии с тем, каков экстремум функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), как функции двух переменных.

Следовательно, в соответствии с необходимым условием экстремума функции одной вещественной переменной $\varphi'(x)\big|_{x=x_0} = 0$, т. е. $\varphi'(x_0) = 0$. Но это значит, что $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Big|_{x=x_0, y=y_0} = 0$, т. е. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

Аналогично устанавливается и второе равенство $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. ▲

Итак, координаты всякой точки экстремума дифференцируемой функции обязаны удовлетворять системе уравнений (8.17). Однако (как и в одномерном случае) может получиться, что не все корни системы (8.17) будут точками локального максимума или локального минимума данной функции.

Пример 8.14. Рассмотрим функцию $z = -x^2 + y^2$, которая в пространстве трех переменных x, y, z образует гиперболический параболоид (рис. 8.3).

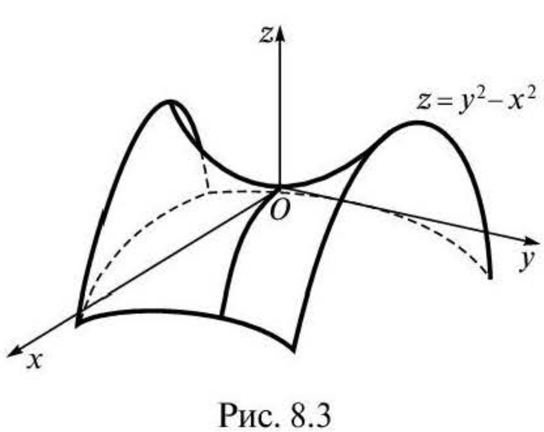


Рис. 8.3

Действительно, в этом случае

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

и, следовательно, точка $(0, 0)$ удовлетворяет необходимым условиям экстремума. Однако ясно, что в начале координат y функции $z = y^2 - x^2$ нет ни локального минимума, ни локального максимума — это так называемая *седловая точка*.

В связи с этим вводится дополнительное понятие стационарных точек функции $f(x,y)$.

Определение 8.11. Точка (x_0,y_0) называется *стационарной точкой дифференцируемой функции* $f(x,y)$, если ее координаты удовлетворяют системе (8.16), т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

Отсюда следует, что всякая экстремальная точка является стационарной, но, вообще говоря, не наоборот.

8.5.2. Достаточные условия экстремума

Вопрос о том, как выяснить, является ли стационарная точка экстремальной или нет, решается с помощью вторых частных производных функции $f(x,y)$.

Для удобства формулировки основной теоремы этого подраздела введем обозначения

$$a_{11}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), \quad a_{12}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0), \quad a_{22}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0).$$

Теорема 8.9. Пусть (x_0,y_0) — стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x,y)$. Тогда:

1) если $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, то точка (x_0,y_0) является экстремальной точкой функции $f(x,y)$, при этом:

а) если $a_{11}>0$, то (x_0,y_0) — точка локального минимума,

б) если $a_{11}<0$, то (x_0,y_0) — точка локального максимума;

2) если $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, то в точке (x_0,y_0) экстремума нет;

3) если $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, то требуется дальнейшее исследование.

Доказательство. Сравним значения $f(x_0,y_0)$ со значениями $f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$, используя формулу Тейлора. Имеем

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+\frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)+o(\rho^2),$$

где $\rho^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$.

Поскольку (x_0,y_0) — стационарная точка, то $df(x_0,y_0)=0$ и, следовательно, приращение $\Delta f(x_0,y_0)$ записывается в виде

$$\Delta f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)+o(\rho^2),$$

или, что то же,

$$\Delta f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}[a_{11}(\Delta x)^2+2a_{12}\Delta x\Delta y+a_{22}(\Delta y)^2]+o(\rho^2).$$

Вначале покажем, что в условиях 1 приращение $\Delta f(x_0,y_0)\ge 0$ или, наоборот, $\Delta f(x_0,y_0)\le 0$ (в зависимости от знака a_{11}), т.е.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
Г834

Рецензенты:
доцент кафедры высшей математики Московского государственного института стали и сплавов (ТУ) *Т.Н. Сабурова* (зав. кафедрой — проф. Б.Г. Разумейко);
преподаватель Московского государственного колледжа информационных технологий *В.П. Родичев*

Григорьев В.П.

Г834 Элементы высшей математики : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский. — 10-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2014. — 320 с.

ISBN 978-5-4468-0784-0

В учебнике представлены все основные разделы высшей математики: элементы теории множеств, линейной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления; числовые последовательности; обыкновенные дифференциальные уравнения.

Теоретическую часть учебника дополняет большое количество практических задач; в приложении дано краткое описание пакета прикладных программ по математике MAPLE.

Учебник может быть использован при изучении дисциплины в естественнонаучном цикле в соответствии с требованиями ФГОС СПО для укрупненной группы специальностей 230000 «Информационная и вычислительная техника».

Для студентов технических специальностей учреждений среднего профессионального образования.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

Учебное издание

Григорьев Валерий Петрович, Дубинский Юлий Андреевич

Элементы высшей математики

Учебник

Редактор *Л.В. Честная*. Технический редактор *Е.Ф. Коржуева*.
Компьютерная верстка: *Д.В. Федотов*. Корректоры *Г.Н. Петрова*, *В.А. Жилкина*

Изд. № 110106426. Подписано в печать 10.02.2014. Формат 60×90/16. Гарнитура «Таймс».
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,0. Тираж 2 500 экз. Заказ №

ООО «Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1.
Тел./факс: (495) 648-0507, 616-00-29.
Санитарно-эпидемиологическое заключение № РОСС RU. AE51. Н 16476 от 05.04.2013.

Отпечатано с электронных носителей, предоставленных издательством,
в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». www.sarpk.ru
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ISBN 978-5-4468-0784-0

Значит, в случае перестановки соседних элементов утверждение доказано.

Перестановку не соседних элементов, а таких, между которыми имеется еще k элементов, осуществляют с помощью последовательных перестановок соседних элементов. Действительно, элемент, расположенный левее, можно последовательно переставлять с соседствующими справа элементами и переместить его на нужную позицию с помощью $k + 1$ таких перестановок. При этом второй переставляемый элемент окажется смещенным на одну позицию влево. Последовательно переставляя его с элементами, стоящими слева, можно за k перестановок перевести его на требуемую позицию, для чего понадобится $2k + 1$ перестановок соседних элементов. При каждой такой перестановке четность меняется, а поскольку число $2k + 1$ нечетно, четность изменится нечетное число раз. Следовательно, окончательная четность перестановки изменится. ▲

Определение 2.7. Определителем квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n называется сумма

$$\sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)},$$

где $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — число инверсий в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ из n номеров столбцов матрицы A. Сумма берется по всем таким перестановкам.

Нетрудно убедиться в том, что ранее введенные определители первого, второго и третьего порядков удовлетворяют этому определению.

Рассматривая приведенную в определении сумму, заметим, что ее слагаемые, называемые *членами определителя*, строятся по следующему правилу: все элементы произведения стоят в разных строках и в разных столбцах матрицы A, причем каждая строка и каждый столбец имеют одного и только одного представителя в каждом члене определителя. Общее число слагаемых в сумме равно числу перестановок из n номеров столбцов матрицы A, т. е. перестановок $(1, 2, \ldots, n)$, $(2, 1, \ldots, n)$, ..., $(n, n - 1, \ldots, 1)$. Их число равно $n!$, т. е. при больших n весьма велико. Например, при $n = 10$ оно равно, как было указано выше, 3 628 800. Поэтому формула, фигурирующая в определении, как правило, мало пригодна для вычисления определителей. Но она позволяет доказать ряд свойств определителя, использование которых приводит к более простым приемам его вычисления.

2.2.2. Свойства определителя

Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — квадратная матрица порядка n. Рассмотрим матрицу $B = \|b_{ij}\|$ порядка n такую, что для всех значений i и j имеют место равенства $b_{ij} = a_{ji}$. Эти равенства означают, что элемент матв точке (x_0, y_0) имеется экстремум. Для этого удобно записать приращения Δx и Δy в полярных координатах (рис. 8.4), а именно

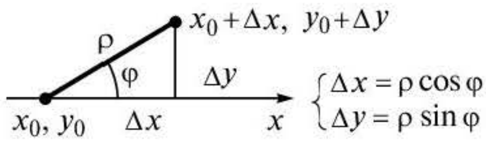


Рис. 8.4

$$\Delta x = \rho\cos\varphi,\ \Delta y = \rho\sin\varphi,\ \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Имеем

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\rho^2}{2}\left[(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi) + \frac{o(\rho^2)}{\rho^2}\right],$$

где φ меняется на отрезке $[0, 2\pi]$, $\rho > 0$.

Заметим, что если функция

$$A(\varphi) \equiv a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi \qquad (8.18)$$

окажется на отрезке $[0, 2\pi]$ строго положительной, то, согласно второй теореме Вейерштрасса, она достигает в некоторой точке $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ своего минимального значения $m = \min\limits_{0\le\varphi\le 2\pi} A(\varphi) = f(\varphi_0) > 0$.

Тем самым при достаточно малых $\rho > 0$ (например, с того момента, когда $\left|\dfrac{o(\rho^2)}{\rho^2}\right| \le \dfrac{m}{2}$) будем иметь

$$\Delta f(x_0, y_0) \ge \frac{\rho^2}{2}\left(A(\varphi) - \frac{m}{2}\right) \ge \frac{\rho^2}{2}\frac{m}{2} > 0$$

при $\rho \ne 0$ и любом $\varphi \in [0, 2\pi]$. Это и будет означать, что в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет локальный минимум.

Совершенно аналогично рассматривается случай $A(\varphi) < 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, который приводит к локальному максимуму функции $f(x, y)$.

Итак, дело свелось к исследованию знака функции $A(\varphi)$ в условиях **1**.

Нетрудно видеть, что при $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 > 0$ значение $a_{11} \ne 0$ и функцию $A(\varphi)$ можно представить в виде

$$A(\varphi) = \frac{1}{a_{11}}\left[(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\sin^2\varphi\right], \qquad (8.19)$$

где оба слагаемых неотрицательны.

Более того, поскольку $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ одновременно в нуль не обращаются, то при любом $\varphi \in [0, 2\pi]$ выражение в квадратных скобках строго положительно.

В итоге получаем, что если при этом $a_{11} > 0$, то $A(\varphi) > 0$, а если $a_{11} < 0$, то $A(\varphi) < 0$ при всех $\varphi \in [0, 2\pi]$. Это и требуется.

Обратимся теперь к условию 2, т. е. к случаю, когда $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, и покажем, что в точке (x_0, y_0) экстремума нет. Для этого, очевидно, достаточно указать два угловых направления $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, вдоль которых функция $A(\varphi)$ будет иметь разные знаки при любых достаточно малых $\rho > 0$.

Эти направления нетрудно увидеть. Именно, если $a_{11} \neq 0$, то из (8.19) получаем, что при $\varphi_1 = 0$ значения $A(\varphi_1) = a_{11}$, а при $\varphi_2 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)$ значение $A(\varphi_2) = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}}{a_{11}}\sin^2\varphi_2$.

Поскольку по условию 2 $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то, каков бы ни был знак числа a_{11}, значения $A(\varphi_1)$ и $A(\varphi_2)$ имеют разные знаки. Так как при этом $\rho > 0$ может быть сколь угодно малым, это и значит, что в точке (x_0, y_0) экстремума нет.

Если $a_{11} = 0$, то функция $A(\varphi)$ принимает вид

$$A(\varphi) = (2a_{12}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi)\sin\varphi$$

(заметим при этом, что в случае $a_{11} = 0$ из условия 2 следует, что $a_{12} \neq 0$).

Ясно, что при достаточно малых φ функция в скобках имеет тот же знак, что и число a_{12}. В то же время $\sin\varphi$ изменяет знак при переходе через точку $\varphi = 0$. Следовательно, при достаточно малых $\varphi \neq 0$ форма $A(\varphi)$ меняет знак. Это указывает на то, что экстремума нет.

Что же касается вырожденного случая $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ (условие 3), то, как показывают конкретные примеры, в этих точках возможны как экстремумы, так и их отсутствие. ▲

Пример 8.15. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x + 32y - 7.$$

Вначале ищем стационарные точки этой функции, т. е. находим корни системы уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 4x^3 - 4 = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 4y^3 + 32 = 0.$$

Очевидно, единственной стационарной точкой будет точка $M_0(1, -2)$.

Теперь выясним, применяя теорему 8.9, является ли эта точка экстремальной. Имеем

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) = 12x^2\Big|_{\substack{x=1\\ y=-2}} = 12, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = 12y^2\Big|_{\substack{x=1\\ y=-2}} = 48,$$

$$a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Таким образом, $a_{11} > 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 > 0$, т. е. условие 1а. Следовательно, в точке $M_0(1, -2)$ функция имеет локальный минимум.

Пример 8.16. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = y^2 - x^2$. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Следовательно, начало координат $M_0(0,0)$ является стационарной точкой этой функции. Далее

$$a_{11}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)=-2,\ \ a_{22}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)=2,\ \ a_{12}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M_0)=0.$$

Таким образом, $a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2=-4$ (условие 2). Следовательно, в стационарной точке экстремума нет (см. рис. 8.3).

8.5.3. Условный экстремум. Метод множителя Лагранжа

На практике часто приходится иметь дело с экстремальными задачами для функций многих переменных при различных ограничениях, связывающих независимые переменные. Такие задачи называются экстремальными задачами с ограничениями или задачами условного экстремума.

Классической задачей условного экстремума является следующая.

Пусть $z=f(x,y)$ — функция, определенная в некоторой области $G\subset R^2_{x,y}$. Пусть, далее, Γ — некоторая кривая, лежащая в области G и характеризуемая уравнением $\varphi(x,y)=0$, где $\varphi(x,y)$ — некоторая функция.

Требуется найти экстремальные значения функции $z=f(x,y)$ при условии, что точки (x,y) находятся на кривой Γ (или, что то же, удовлетворяют уравнению $\varphi(x,y)=0$), рис. 8.5.

Символически эту задачу записывают так:

$$z=f(x,y)\to\text{extr},\ \varphi(x,y)=0,\tag{8.20}$$

причем соотношение $\varphi(x,y)=0$ называют условием, или *уравнением связи*.

Переходим к строгим формулировкам.

Пусть $M_0(x_0,y_0)\in\Gamma$ — некоторая точка. Это означает, что ее координаты удовлетворяют уравнению связи, т. е. $\varphi(x_0,y_0)=0$.

Определение 8.12. Точка $M_0\in\Gamma$ называется точкой *локального условного максимума* задачи (8.20), если найдется такая окрестность $U(x_0,y_0)$ точки M_0, что для любой точки из этой окрестности, лежащей на кривой Γ, справедливо неравенство $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$.

Аналогично определяется точка локального условного минимума.

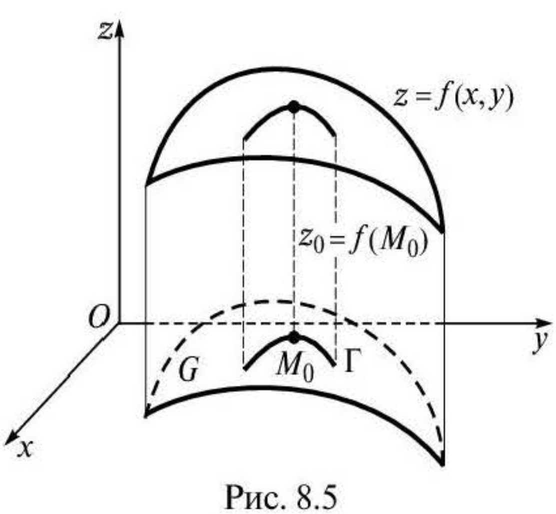


Рис. 8.5

Замечание. Очевидно, что главное отличие определения 8.11 от определения точки безусловного локального максимума (см. определение 8.9) в том, что со значением $f(x_0,y_0)$ сравниваются значения

$f(x,y)$ не для всех близких значений $(x,y) \in U(x_0,y_0)$, а только для тех, которые дополнительно удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x,y) = 0$.

Ясно, что точка условного локального максимума или минимума вовсе не обязана быть соответствующей точкой безусловного экстремума функции $f(x,y)$.

Точки локального условного максимума и точки локального условного минимума называются *экстремальными точками задачи условного экстремума*.

Задача условного экстремума значительно сложнее задачи безусловного экстремума, поэтому здесь остановимся только на необходимых условиях, которые приводят к практическому методу нахождения точек условного экстремума задачи (8.20).

Теорема 8.10. Пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ есть точка условного экстремума задачи (8.20). Тогда существует число λ_0 (называемое множителем Лагранжа) такое, что трехмерная точка (x_0,y_0,λ_0) является стационарной точкой безусловного экстремума функции

$$L(x,y,\lambda) \equiv f(x,y) + \lambda\varphi(x,y).$$

Таким образом, теорема утверждает, что какова бы ни была экстремальная точка $M_0(x_0,y_0)$ задачи (8.20), ее координаты (x_0,y_0) необходимо являются (вместе с множителем Лагранжа) решением системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,$$

т.е. системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 0; \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases} \tag{8.21}$$

Отсюда вытекает и практический алгоритм решения задачи условного экстремума (8.20), называемый *методом множителя Лагранжа*:

1) составление функции Лагранжа $L(x,y,\lambda)$;

2) решение системы (8.21);

3) отбор среди всевозможных решений (x_0,y_0,λ_0) системы (8.21) тех пар (x_0,y_0), которые являются решением исходной задачи (8.20). Это осуществляется с привлечением дополнительных соображений геометрического, физического характера и др.

Пример 8.17. Решить задачу

$$\begin{cases} f(x,y) = y^2 - x^2 \to \text{extr}; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{8.22}$$

Геометрически эта задача заключается, очевидно, в нахождении экстремальных точек функции $f(x,y)$ при рассмотрении ее значений только на единичной окружности с центром в начале координат.

Запишем уравнение связи в виде

$$\varphi(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$$

и составим функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda) \equiv y^2 - x^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ищем теперь стационарные точки функции Лагранжа как решение системы (8.21):

$$\begin{cases} -2x + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(-1+\lambda) = 0 \\ y(1+\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы являются четыре точки (x, y, λ):

$$(\pm 1, 0, 1),\ (0, \pm 1, -1).$$

Следовательно, точки $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, лежащие на окружности $x^2 + y^2 = 1$, могут быть экстремальными точками задачи (8.22).

Все они, действительно, являются таковыми, при этом из вида функции $f(x,y) = y^2 - x^2$ очевидно, что в точках $(0, \pm 1)$ имеется максимум функции $f(x,y)$, равный $f(0,\pm 1) = 1$, а в точке $(\pm 1, 0)$ — минимум, равный $f(\pm 1, 0) = -1$.

8.5.4. Задача о наибольшем и наименьшем значениях

В заключение рассмотрим задачу о наибольшем и наименьшем значениях функции $f(x,y)$, заданной в ограниченной области вместе с границей. Именно, пусть $f(x,y)$ определена в замыкании области G, т.е. на компакте $\bar{G} = G \cup \Gamma$, и эта функция непрерывна в $\bar{G}$. Тогда, согласно второй теореме Вейерштрасса, она достигает в $\bar{G}$ своих наибольшего и наименьшего значений. Это значит, что существует хотя бы одна точка $(x_0, y_0) \in \bar{G}$ такая, что

$$f(x_0, y_0) = \max f(x,y),\ (x,y) \in \bar{G},$$

и хотя бы одна точка $(x_1, y_1) \in \bar{G}$ такая, что

$$f(x_1, y_1) = \min f(x,y),\ (x,y) \in \bar{G}.$$

Эти точки $(x,y) \in \bar{G}$ называются *точками абсолютного максимума* и *абсолютного минимума функции* $f(x,y)$ на компакте $\bar{G}$, или, что то же, точками наибольшего и наименьшего значений.

Наша цель — указать метод практического отыскания точек наибольшего и наименьшего значений $f(x,y)$ в $\bar{G}$.

Для этого заметим, что каждая из точек (x_0, y_0), (x_1, y_1) может оказаться либо внутренней точкой компакта $\bar{G} = G \cup \Gamma$, т.е. принадлежать области G, либо находиться на границе Γ.

Рассмотрим, например, точку (x_0, y_0). В первом случае она, очевидно, окажется и точкой локального максимума функции $f(x, y)$. Следовательно, она может быть найдена с помощью теоремы 8.9 о безусловном экстремуме. Во втором случае точка $(x_0, y_0) \in \Gamma$ будет, очевидно, точкой условного максимума задачи

$$f(x, y) \to \text{extr}, \ (x, y) \in \Gamma. \tag{8.20}$$

То же можно сказать и о точке абсолютного минимума.

Из изложенного вытекает и метод решения задачи о наибольшем и наименьшем значениях. Он состоит из трех этапов:

1) находятся возможные точки локального безусловного экстремума функции $f(x, y)$ в области G;

2) определяются точки условного экстремума задачи (8.20), т.е. точки экстремума функции $f(x, y)$, когда $(x, y) \in \Gamma$;

3) сравниваются значения функции $f(x, y)$ во всех точках, найденных на предыдущих этапах, и среди них выбираются наибольшее и наименьшее значения.

Пример 8.18. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = y^2 - x^2$ в единичном замкнутом круге $x^2 + y^2 \le 1$. Эта задача была фактически решена в примерах 8.15 и 8.17. Из примера 8.15 следует, что внутри единичного круга точек безусловного экстремума у функции $z = y^2 - x^2$ нет. Напротив, на единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ имеются две точки $(0, \pm 1)$ условного максимума и две точки $(\pm 1, 0)$ условного минимума. В этих точках и достигаются абсолютные максимум и минимум функции $z = y^2 - x^2$ в замкнутом круге $x^2 + y^2 \le 1$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Пусть $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin x$. Убедитесь в том, что имеют место тождества

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2. Пусть $u(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Покажите, что в любой точке (x, y, z) не расположенной в начале координат,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

3. Представьте многочлен $P(x, y) = x^2 - xy + y^2$ по степеням $x - 1$, $y + 1$.

4. Найдите экстремальные точки функции $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x - 2y - 3$ в области, определенной неравенствами $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$.

ГЛАВА 9

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

9.1. Объем цилиндрического бруса. Определение двойного интеграла

9.1.1. Основные определения

Пусть $z = f(x, y) \geq 0$ — непрерывная функция двух переменных, определенная в области $G \subset R^2_{x,y}$. Графиком этой функции является некоторая поверхность S, ограничивающая цилиндрический брус с основанием G (рис. 9.1).

Поставим задачу: определить объем V цилиндрического бруса и найти способ вычисления этого объема.

С этой целью разобьем область G гладкими линиями на конечное число подобластей $G_1, G_2, \ldots, G_N$, т.е. представим область G в виде объединения $\bigcup\limits_{i=1}^{N} G_i$.

Ясно, что каждая подобласть G_i определяет находящийся над ней маленький брус объемом V_i, являющийся частью исходного бруса.

Поскольку подобласть G_i мала, то соответствующий маленький брус можно считать минипризмой высотой $z_i = f(\xi_i, \eta_i)$, где $(\xi_i, \eta_i) \in G_i$ — некоторая средняя точка.

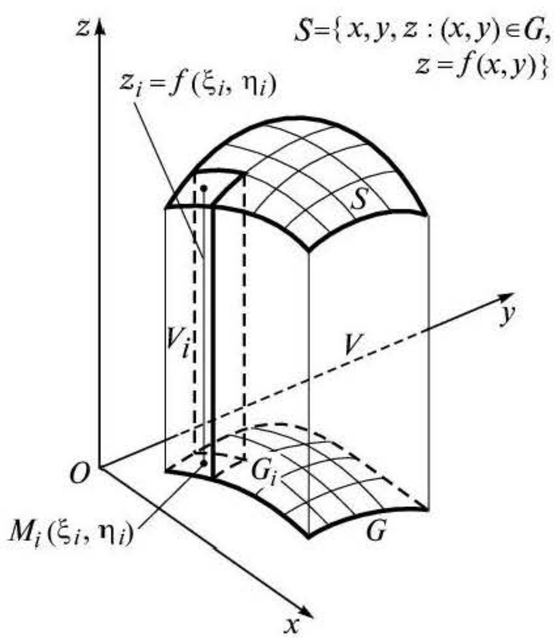


Рис. 9.1

Положим приблизительно $V_i = f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i$, где σ_i — площадь подобласти G_i. Тогда получим, что полный объем

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i \approx \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i.$$

При этом интуитивно ясно, что чем мельче разбиение области G, тем приближение будет точнее, и в конечном итоге в процессе неограниченного измельчения разбиения области G получим истинное значение V.

Теперь перейдем к строгому изложению.

Пусть d_i — диаметр области G_i, т.е. верхняя грань расстояний между всевозможными точками области G_i. Обозначим через λ_N максимальный диаметр среди d_1, d_2, ..., d_N и назовем это число *диаметром разбиения* G_1, G_2, ..., G_N.

Определение 9.1. Число V назовем *объемом криволинейного цилиндрического бруса*, образованного графиком функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in G$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при любом разбиении $G = \bigcup\limits_{i=1}^{N} G_i$, для которого $\lambda_N < \delta$, выполняется неравенство

$$\left| V - \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i \right| < \varepsilon.$$

Коротко можно записать:

$$V = \lim_{\lambda_N \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i.$$

Читатель, конечно, обратил внимание на то, что идеи нахождения объема цилиндрического бруса точно такие же, как при определении площади криволинейной трапеции и определенного интеграла от функции одной вещественной переменной.

Здесь аналогично приходим к понятию двойного интеграла от любой функции $f(x, y)$ по области G, а именно

$$\iint\limits_{G} f(x, y)dxdy = \lim_{\lambda_N \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i. \tag{9.1}$$

Строгое определение повторяет определение 9.1, поэтому его не приводим. Подчеркнем лишь, что и здесь существенным является требование, чтобы предел не зависел от конкретного выбора разбиения области G и выбора средних точек $(\xi_i, \eta_i) \in G_i$, $i = 1, ..., N$.

Можно показать, что для функции $f(x, y)$, *непрерывной* в области G вместе с границей, т.е. в замыкании области G, предел (9.1) существует и не зависит от выбора разбиения и средних точек. Таким образом, для непрерывной в замыкании G функции двойной интеграл существует, т.е. она интегрируема по области G.

Далее, пусть область G разделяется гладкой (или кусочно-гладкой) кривой на две подобласти G_1 и G_2. Предположим, что функция $f(x, y)$ кусочно-непрерывна в области G, т.е. она непрерывна как в G_1, так и в замыкании G_2, и на линии раздела имеет разрывы первого рода.

Примерами кусочно-непрерывных функций могут быть функции:

1) $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & \text{при других значениях } x \text{ и } y \end{cases}$

или

2) $f(x,y)=\begin{cases} x^2-y^2, & \text{верхняя половина круга } x^2+y^2\le 1;\\ 0, & \text{нижняя половина круга.}\end{cases}$

Первая функция (она называется *двумерной функцией Хевисайда*) имеет разрывы первого рода на полуосях $x \ge 0$ и $y \ge 0$, а вторая — на отрезке $[-1, 1]$.

9.1.2. Свойства двойных интегралов. Теорема о среднем

Имеет место следующая теорема, играющая важную роль в приложениях.

Теорема 9.1. Если функция $f(x, y)$ кусочно-непрерывна в области $G = G_1 \cup G_2$, то она интегрируема в области G, причем

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy\,.$$

В случае $f(x, y) \ge 0$ формула (8.19) имеет простой геометрический смысл: объем цилиндрического бруса с основанием G равен сумме объемов цилиндрических брусов с основаниями G_1 и G_2.

Уместно заметить, что на самой линии разрыва, разделяющей области G_1 и G_2, значения кусочно-непрерывной функции роли не играют и формула (8.19) от этих значений не зависит. Таким образом, двойной интеграл обладает следующим замечательным свойством: если значения функции $f(x, y)$ изменить на конечном числе кривых, находящихся в области G, то двойной интеграл не изменится.

Сформулируем ряд свойств двойных интегралов в виде общей теоремы.

Теорема 9.2. Пусть в нижеследующих формулах $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — интегрируемые функции в области G.

Тогда:

1) для любой постоянной c функция $cf(x, y)$ также интегрируема в G, причем

$$\iint\limits_G cf(x,y)dxdy = c\iint\limits_G f(x,y)dxdy;$$

2) сумма (разность) $f(x, y) \pm g(x, y)$ также интегрируема в области G, причем

$$\iint\limits_G [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint\limits_G f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_G g(x,y)dxdy;$$

3) если $f(x, y) \le g(x, y)$ для всех $(x, y) \in G$, то

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy \le \iint\limits_G g(x,y)dxdy;$$

4) функция $|f(x, y)|$ также интегрируема в области G, при этом

$$\left|\iint_G f(x, y)dxdy\right| \le \iint_G |f(x, y)|\,dxdy.$$

В заключение установим теорему о среднем для двойных интегралов.

Теорема 9.3. Пусть $f(x, y)$ непрерывна в замыкании области G, которое обозначим через $\overline{G}$. Тогда найдется хотя бы одна точка $(\xi, \eta) \in \overline{G}$ такая, что

$$\iint_G f(x, y)dxdy = f(\xi, \eta) \operatorname{mes} G,$$

где символом $\operatorname{mes} G$ обозначена площадь области G.

Доказательство. Как неоднократно отмечалось, непрерывная на компакте функция $f(x, y)$ достигает своих минимального и максимального значений и, следовательно, для любой точки $(x, y) \in \overline{G}$ справедливо двустороннее неравенство

$$m \le f(x, y) \le M, \tag{9.2}$$

где $m = \min f(x, y)$, $M = \max f(x, y)$ m в области $\overline{G}$.

Интегрируя неравенство (9.2), получаем

$$m\iint_G dxdy \le \iint_G f(x, y)dxdy \le M\iint_G dxdy.$$

Учитывая, что $\iint_G dxdy = \operatorname{mes} G$, запишем последнее неравенство в виде

$$m \cdot \operatorname{mes} G \le \iint_G f(x, y)dxdy \le M \cdot \operatorname{mes} G$$

и заметим, что число $\mu = \dfrac{1}{\operatorname{mes} G}\iint_G f(x, y)dxdy$ является промежуточным между минимумом и максимумом непрерывной функции $f(x, y)$. Следовательно, найдется хотя бы одна точка $(\xi, \eta) \in \overline{G}$, в которой $f(\xi, \eta) = \mu$. Это и есть искомая формула. ▲

9.2. Вычисление двойного интеграла с помощью повторного интегрирования (формула редукции)

Вычислять двойные интегралы как пределы интегральных сумм весьма затруднительно, поэтому возникает естественная задача о разработке техники двойного интегрирования, минуя непосредственное суммирование и предельный переход в формуле (9.1).

Важнейшим результатом в этом направлении является формула сведения двойного интегрирования к двум последовательным интегрированиям по каждой переменной x и y в отдельности.

рицы B, стоящий в i-й строке и в j-м столбце, совпадает с элементом матрицы A, стоящим в j-й строке и в i-м столбце. Например, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, то $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, матрица A как бы поворачивается вокруг главной диагонали. Матрица B называется *транспонированной* по отношению к матрице A и обозначается через A^{T}.

Пример 2.8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Переход от матрицы A к матрице A^{T} называется *транспонированием* матрицы A. Из примера видно, что при транспонировании строки матрицы A становятся столбцами матрицы A^{T}, а столбцы — строками.

Иногда бывает так, что при транспонировании матрица не изменяется, т.е. $A^{\mathrm{T}} = A$. Тогда матрица A называется *симметрической* матрицей. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & 5 \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

является симметрической матрицей. Нетрудно убедиться в том, что матрица будет симметрической тогда и только тогда, когда ее элементы, симметрично расположенные относительно главной диагонали, совпадают, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ для всех значений i и j. Теперь можно сформулировать первое свойство определителя.

Свойство 1. Определитель матрицы A не меняется при транспонировании матрицы, или $|A| = |A^{\mathrm{T}}|$.

Доказательство. Из определения 2.7 имеем

$$|A| = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}.$$

Каждое произведение $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$ можно переписать, переставив множители так, чтобы на первом месте стоял представитель первого столбца $a_{\beta_1 1}$, на втором месте — представитель второго столбца $a_{\beta_2 2}$ и т.д.

Общее произведение будет иметь вид $a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} \ldots a_{\beta_n n}$, т.е. все множители расположены в порядке номеров столбцов, из которых они берутся. Напомним, что второй индекс у элемента a_{ij} — это номер столбца, в котором он находится.

Теперь заметим, что при упорядочивании в естественное расположение вторых индексов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, мы производим из чисел $1, 2, \ldots, n$ (первых индексов) новую перестановку $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. При этом, если два числа α_s и α_t не образовывали инверсию, то их

Эта формула носит название *формулы редукции* и выглядит наиболее просто для области G, являющейся прямоугольником. С этого случая начнем строгое изложение.

Теорема 9.4. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике

$$\Pi = \begin{Bmatrix} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{Bmatrix}.$$

Тогда

$$\iint_{\Pi} f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx. \tag{9.3}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что ввиду непрерывности функции $f(x, y)$ оба интеграла в формуле (9.3) существуют, и обоснования требует лишь само равенство.

Пусть

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$$

— произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Введем обозначение

$$g(x) = \int_c^d f(x, y)dy.$$

Тогда правая часть формулы (9.3) запишется в виде

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx \equiv \int_a^b g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx.$$

По теореме о среднем,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx = g(\xi_i)\Delta x_i. \tag{9.4}$$

Поэтому из (9.4) получим

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \int_c^d f(\xi_i, y)dy. \tag{9.5}$$

Теперь разобьем отрезок $[c, d]$ на m частей

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_m = b$$

и аналогично, применяя теорему о среднем по y, находим

$$\int_c^d f(\xi_i, y)dy \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)dx = \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_i, \eta_{ji})\Delta y_j,$$

где $\eta_{ij} \in [y_j, y_j + 1]$ при всех $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$.

В итоге из (9.5) получаем, что повторный интеграл

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \sum_{i,j=0}^{n,m} f(\xi_i, \eta_{ji}) \Delta x_i \Delta y_j. \tag{9.6}$$

Полученная формула указывает на то, что повторный интеграл представлен в виде двойной интегральной суммы для функции $f(x,y)$, которая отвечает произвольным разбиениям отрезков $[a,b]$ и $[c,d]$, а тем самым и прямоугольника. Поскольку выбор средних точек (ξ_i, η_{ji}) может быть любым, то при стремлении длин разбиений к нулю из (9.6) немедленно получаем, что

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \iint_\Pi f(x,y)dxdy. \ \blacktriangle$$

Замечание. В формуле редукции (9.3) переменные x и y можно поменять ролями, т. е. наряду с формулой (9.3) справедлива и формула

$$\iint_\Pi f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Особенно просто формула редукции выглядит для функций с разделенными переменными, т. е. для функций вида $f(x,y) = X(x)\,Y(y)$. В этом случае

$$\iint_\Pi X(x)Y(y)dxdy = \int_a^b X(x)dx \int_c^d Y(y)dy.$$

Пример 9.1. Вычислить двойной интеграл по прямоугольнику $\Pi = \{(x,y),\ 0 \le x \le 1,\ 2 \le y \le 3\}$ от функции $f(x,y) = x^2 - y$.

Имеем по формуле редукции

$$\iint_\Pi (x^2 - y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_2^3 (x^2 - y)dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=2}^{y=3} dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{5}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} = -\frac{13}{6}.$$

Замечание. С небольшими дополнениями формула редукции (9.3) доказывается и для кусочно-непрерывных функций. Примем этот факт без описания соответствующих дополнений.

Обратимся к случаю произвольной области. Точнее, пусть область G задана в виде неравенств

$$G = \{(x,y)\colon a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

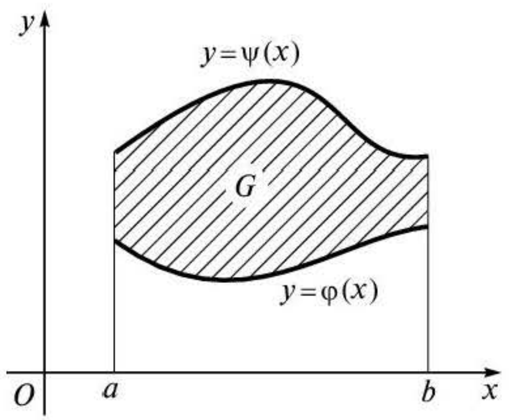


Рис. 9.2

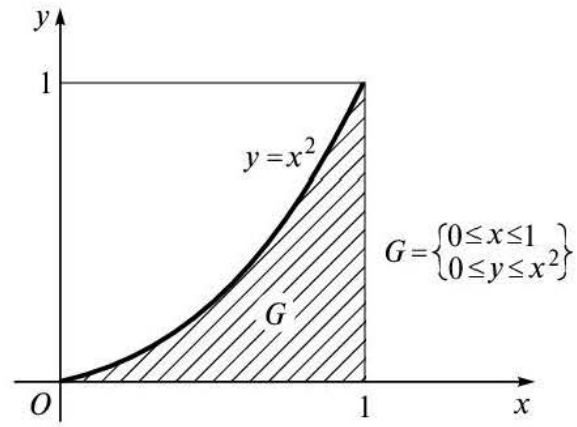


Рис. 9.3

Геометрически область G есть криволинейная трапеция с верхней границей $y = \psi(x)$ и нижней границей $y = \varphi(x)$ (рис. 9.2).

Теорема 9.5. Пусть функция $f(x, y)$ кусочно-непрерывна в G. Тогда

$$\iint_G f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \right)dx. \tag{9.7}$$

Доказательство. Заключим область G в какой-либо прямоугольник $\Pi = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, где c и d — подходящие числа. В прямоугольнике Π рассмотрим вспомогательную функцию:

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), (x, y) \in G; \\ 0, \qquad (x, y) \in \Pi \setminus G, \end{cases}$$

очевидно, функция $f^*(x, y)$ есть продолжение функции $f(x, y)$ нулем вне области G. Ясно, что

$$\iint_G f(x, y)dxdy = \iint_\Pi f^*(x, y)dxdy, \tag{9.8}$$

и, следовательно, по формуле редукции для прямоугольника (см. теорему 9.4)

$$\iint_\Pi f^*(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f^*(x, y)dy \right)dx. \tag{9.9}$$

Но, при каждом $x \in [a, b]$, по определению,

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } \varphi(x) \le y \le \psi(x); \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int_c^d f^*(x, y)dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy.$$

Подставляя это выражение в формулу (9.9), а затем в формулу (9.8), получаем искомую формулу (9.7). ▲

Формула (9.7) является важнейшим инструментом вычисления двойных интегралов.

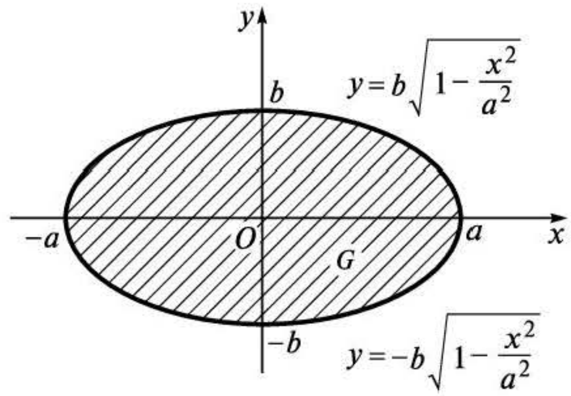


Рис. 9.4

Пример 9.2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_G x^3 e^{xy}\,dxdy,$$

где G — криволинейная трапеция, образованная графиком параболы на отрезке $[0,1]$ (рис. 9.3).

Очевидно, область G записывается в виде неравенств

$$G = \begin{Bmatrix} (x,y) : 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le x^2 \end{Bmatrix},$$

поэтому по формуле (9.7)

$$\iint\limits_G x^3 e^{xy}\,dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{x^2} x^3 e^{xy}\,dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 e^{xy} \right)_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x^2 \left(e^{x^3} - 1 \right) dx = \left(\frac{e^{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}(e-2).$$

Пример 9.3. Пусть G — внутренность эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 9.4).

Записать двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$ в виде повторных интегралов.

Очевидно,

$$G = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}.$$

Эту область можно представить в виде неравенств двумя способами:

1) $G = \left\{ (x,y) : -a \le x \le a, -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \right\};$

2) $G = \left\{ (x,y) : -b \le y \le b, -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \le x \le a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \right\}.$

Следовательно,

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_{-a}^{a}\left(\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_{-b}^{b}\left(\int\limits_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} f(x,y)dx\right)dy.$$

9.3. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Как известно, ряд областей на плоскости $\mathbf{R}^2_{x,y}$ удобно описывать в полярных координатах (ρ,φ). Полярные координаты связаны с декартовыми координатами формулами

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

Переменная ρ есть расстояние от начала координат O до точки $M(x,y)$, а φ — угол, образованный вектором $\mathbf{OM}$ с положительным направлением оси Ox. Полярный угол φ изменяется либо в пределах $0 \le \varphi < 2\pi$, либо в пределах $-\pi < \varphi \le \pi$ (рис. 9.5).

Линии $\rho = R$ $(R > 0)$ и $\varphi = \varphi_0$ $(0 \le \varphi_0 < 2\pi)$ называются *координатными линиями* и образуют на плоскости (x,y) так называемую *полярную сетку* — семейство окружностей и лучей. Именно области, ограниченные (хотя бы частично) координатными линиями, являются наиболее удобными для вычисления двойных интегралов в полярных координатах. Такими областями являются области, приведенные в табл. 9.1.

Заметим важное общее обстоятельство, присущее перечисленным областям: все эти области в полярных координатах описываются неравенствами, причем в случае $\rho_0(\varphi) = \mathrm{const}$, $\rho_1(\varphi) = \mathrm{const}$ область G в полярных координатах есть обычный прямоугольник. Это существенно упрощает вычисление двойных интегралов.

Ясно также, что таблица характерных областей составлена по принципу «от простого к сложному» и последняя область является наиболее общей в том смысле, что при различных значениях параметров α и β, а также функций $\rho_0(\varphi)$ и $\rho_1(\varphi)$ можно получить все предыдущие области (читатель легко убедится в этом самостоятельно). Поэтому, если установить формулу перехода в двойных интегралах от декартовых координат к полярным для случая криволинейного кольцевого сектора, то тем самым будут охвачены и все остальные области.

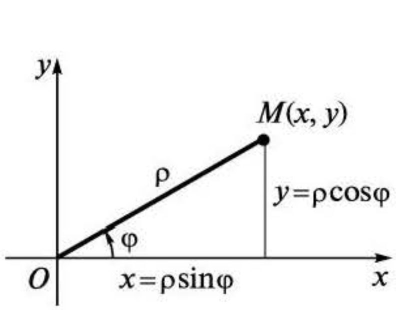
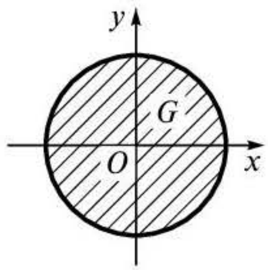
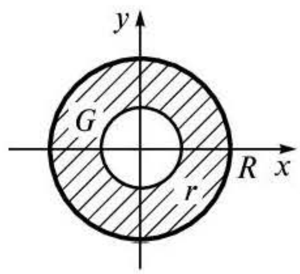
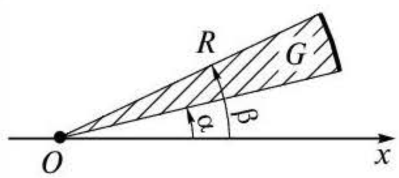
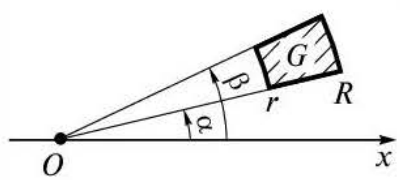
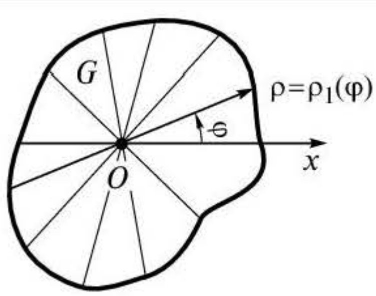
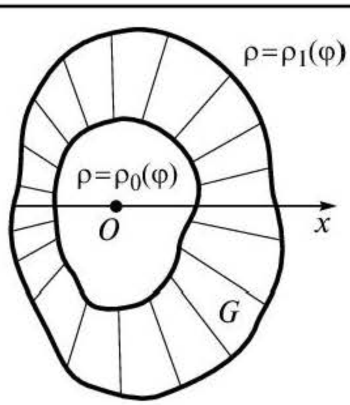


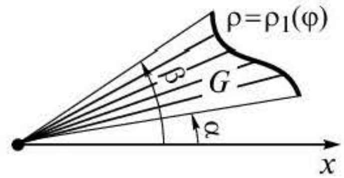
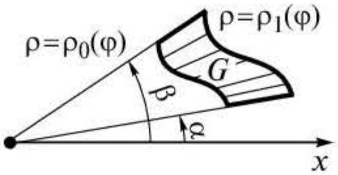
Рис. 9.5

Таблица 9.1

Области вычисления двойных интегралов в полярных координатах

Область G	Чертеж на плоскости $\mathbf{R}^2_{x,y}$	Задание в полярных координатах
Круг радиусом R с центром в начале координат		$G = \{(\rho, \varphi)\colon 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \rho < R\}$
Кольцо		$G = \{(\rho, \varphi)\colon 0 \le \varphi < 2\pi,\ r < \rho < R\}$
Круговой сектор		$G = \{(\rho, \varphi)\colon \alpha \le \varphi < \beta,\ \rho < R\}$
Кольцевой сектор		$G = \{(\rho, \varphi)\colon \alpha \le \varphi < \beta,\ r < \rho < R\}$
Звездная область		$G = \{(\rho, \varphi)\colon 0 \le \varphi < 2\pi,\ \rho < \rho_1(\varphi)\}$ $\rho_1(\varphi) \ge 0$ — некоторая функция угла φ, описывающая границу
Криволинейное кольцо		$G = \{(\rho,\varphi)\colon 0 \le \varphi < 2\pi,$ $\rho_0(\varphi) < \rho < \rho_1(\varphi)\}$ $\rho_0(\varphi)$ и $\rho_1(\varphi)$ — некоторые функции угла φ, описывающие границу кольца

Окончание табл. 9.1

Область G	Чертеж на плоскости $\mathbf{R}^2_{x,y}$	Задание в полярных координатах
Криволинейный сектор		$G = \{(\rho,\varphi)\colon \alpha \le \varphi < \beta,\ 0 \le \rho < \rho_1(\varphi)\}$
Криволинейный кольцевой сектор		$G = \{(\rho,\varphi)\colon \alpha \le \varphi < \beta,\ \rho_0(\varphi) < \rho < \rho_1(\varphi)\}$

Итак, пусть требуется вычислить двойной интеграл

$$I \equiv \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy,$$

где $G = \{(\rho,\varphi)\colon \alpha < \varphi < \beta,\ \rho_0(\varphi) < \rho < \rho_1(\varphi)\}$ и $f(x,y)$ — непрерывная в $\bar{G}$ функция.

Теорема 9.6. Пусть $f(x,y)$ — непрерывная в $\bar{G}$ функция. Тогда имеет место формула

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{\rho_0(\varphi)}^{\rho_1(\varphi)} f[\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi]\rho\, d\rho \right) d\varphi. \tag{9.10}$$

Доказательство формулы (9.10) можно провести строго по той же схеме, что и доказательство формулы редукции (9.5), но мы предложим хотя и нестрогое, но геометрически ясное рассуждение, которое к тому же проливает свет на появление и роль множителя ρ в правой части.

По определению, двойной интеграл есть предел интегральных сумм [см. формулу (9.1)], причем разбиение области G и выбор средних точек в каждой подобласти разбиения могут быть произвольными.

Запишем двойной интеграл по области G в виде

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy \equiv \iint\limits_G f(x,y)\,dG, \tag{9.11}$$

подразумевая под символом dG площадь «бесконечно малых» подобластей, участвующих в определении двойного интеграла.

Далее, учитывая свободу выбора подобластей разбиения, разделим область G полярной сеткой на элементарные площадки, ограниченные окружностями радиусами ρ и $\rho + d\rho$ и лучами, образующими с осью Ox углы φ и $\varphi + d\varphi$ (рис. 9.6).

Очевидно, площадь dG такой подобласти вычисляется по формуле $dG = \rho\, d\rho\, d\varphi$. Следовательно, заменяя в правой части равенства (9.11) x на $\rho\cos\varphi$ и y на $\rho\sin\varphi$, а dG на $\rho\, d\rho\, d\varphi$, получаем, что

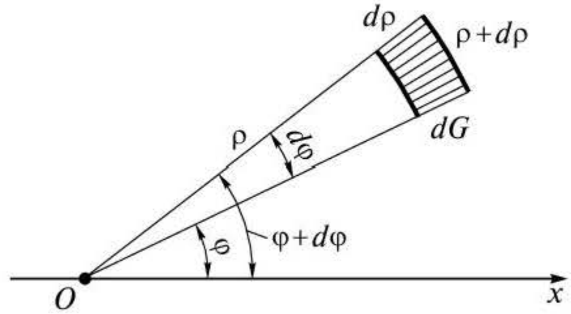


Рис. 9.6

$$\iint\limits_G f(x, y)dG =$$

$$= \iint\limits_G f[\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi]\rho d\rho d\varphi. \quad (9.12)$$

Остается заметить, что в полярных координатах область G записывается в виде

$$G = \{(\rho,\varphi):\ \alpha < \varphi < \beta,\ \rho_0(\varphi) < \rho < \rho_1(\varphi)\}$$

и, следовательно, по формуле редукции (9.5) приходим к искомой формуле (9.10). ▲

Замечание. Попутно обратим внимание на геометрический смысл множителя ρ в формуле (9.12). Он виден из полученного соотношения $dG = \rho d\rho d\varphi$ и является коэффициентом растяжения при сравнении бесконечно малой области G на плоскости xOy и ее образа на декартовой плоскости полярных координат ($\rho O \varphi$).

Пример 9.4. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_G (x^2 - y^2)\, dxdy,$$

где G — сектор, ограниченный прямой $y = x$, положительной полуосью x и окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

Легко видеть, что G есть круговой сектор

$$G = \{(\rho, \varphi) : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le \rho \le 1\}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_G (x^2 - y^2)dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int\limits_0^1 \rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\rho d\rho \right) d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{8}.$$

Пример 9.5. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_G \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy,$$

где G — область, ограниченная кривой $x^2 + y^2 = 2ax$. Очевидно, что это кривая может быть представлена в виде $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ и, следовательно, это окружность радиусом a и центром в точке $(a, 0)$ (рис. 9.7).

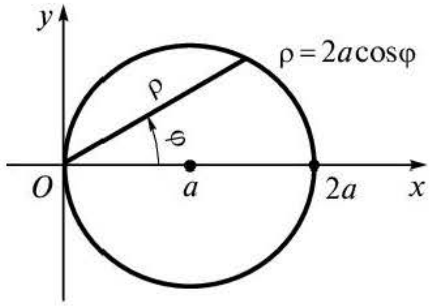


Рис. 9.7

В полярных координатах уравнение этой окружности есть $\rho = 2a\cos\varphi$, при этом угол φ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$G = \{(\rho,\ \varphi):\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho < 2a\cos\varphi\}$$

и, значит,

$$\iint\limits_G \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int\limits_0^{2a\cos\varphi} \sqrt{\rho^2}\rho d\rho \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=2a\cos\varphi} d\varphi = \frac{8a^3}{3} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{8a^3}{3} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2\varphi)\, d\sin\varphi =$$

$$= (\text{замена } t = \sin\varphi) = \frac{8a^3}{3} \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2)dt = \frac{32}{9} a^3.$$

9.4. Приложения двойного интеграла

В этом подразделе даны некоторые приложения двойного интеграла к геометрическим задачам, а также к задачам механики.

9.4.1. Вычисление объемов

Вопрос об определении объема криволинейного бруса был рассмотрен в подразделе 9.1. Тот факт, что объем криволинейного бруса выражается формулой

$$V = \iint\limits_G f(x, y)dxdy, \quad (9.13)$$

принято считать геометрическим смыслом двойного интеграла от неотрицательной функции $f(x, y)$.

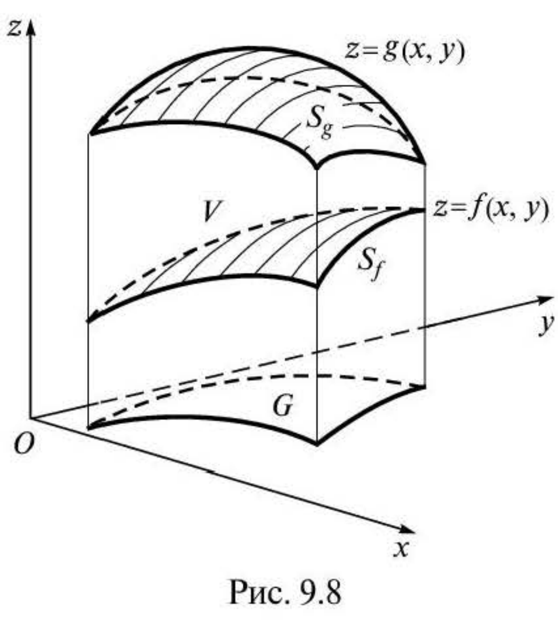


Рис. 9.8

Простым следствием формулы (9.13) является более общая формула вычисления объема, заключенного между двумя поверхностями, определенными в области $G \subset \mathbf{R}^2_{x,y}$.

Именно, пусть $z = f(x, y)$ и $z = g(x, y)$ — две функции, определенные в одной и той же области G на плоскости (x, y). Пусть, кроме того, $f(x, y) \le g(x, y)$ на данной области. Графики этих функций в трехмерном пространстве (x, y, z) определяют поверхности

$$S_f = \{(x, y, z)\colon (x, y) \in G,\ z = f(x, y)\}$$

и

$$S_g = \{(x, y, z)\colon (x, y) \in G,\ z = g(x, y)\},$$

между которыми заключен объем, имеющий торцевые поверхности S_f и S_g (рис. 9.8).

Ясно, что объем V этого тела вычисляется по формуле

$$V = \iint_G [g(x, y) - f(x, y)]dxdy.$$

9.4.2. Площадь криволинейной поверхности

Пусть $S = \{(x, y, z)\colon (x, y) \in G,\ z = f(x, y)\}$ — поверхность, являющаяся графиком непрерывно дифференцируемой функции $z = f(x, y)$, определенной в области G (рис. 9.9).

Наша задача — найти площадь поверхности S, т.е. определить ее и указать способ вычисления.

Для этого разобъем поверхность S гладкими линиями на N частей $S_1, \ldots, S_N$, т.е. представим S в виде объединения $S = \bigcup\limits_{1 \le i \le N} S_i$. Этому разбиению соответствует разбиение области G на подобласти $G_1, \ldots, G_N$, каждая из которых является проекцией на плоскость (xOy) «малых» поверхностей $S_1, \ldots, S_N$.

Как известно, при проектировании плоских фигур их площади связаны проекционным множителем $\cos\nu$, где ν — угол между нормалью к S и направлением проектирования. Поэтому, если разбиение $S_1, \ldots, S_N$ достаточно мелкое, то можно приближенно считать, что

$$\text{пл. } G_i = \text{пл. } S_i \cos\nu_i,$$

где ν_i — острый угол, образованный нормалью $\mathbf{n}$ к S_i и положительным направлением оси Oz (индекс i означает, что вектор нормали $\mathbf{n}$ вычисляется в средней точке $M_i = (\zeta_i, \eta_i, z_i)$, где $(\zeta_i, \eta_i) \in G_i$, $z_i = f(\zeta_i, \eta_i)$).

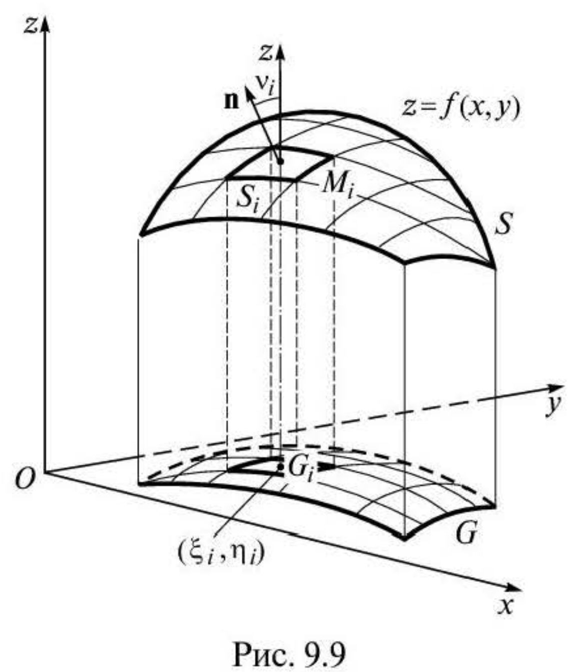


Рис. 9.9

перестановка в правильное расположение (α_t раньше, чем α_s) приведет к перестановке чисел s и t, нарушающей их естественный порядок, т.е. к образованию инверсии. Таким образом, после устранения всех инверсий в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ она превратится в перестановку $(1, 2, ..., n)$, а итоговая перестановка из вторых индексов $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ будет иметь столько же инверсий, сколько их имела перестановка $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

В транспонированной матрице рассматриваемое произведение примет вид $a_{1\beta_1}a_{2\beta_2}\dots a_{n\beta_n}$, а его знак будет определяться числом инверсий в перестановке $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, которое, как мы убедились, совпадает с числом инверсий в перестановке $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, т.е. с числом $S(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Следовательно, произведение $a_{1\beta_1}a_{2\beta_2}\dots a_{n\beta_n}$ входит в сумму членов определителя $|A^{\mathrm{T}}|$ с тем же знаком, что и произведение $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$ в сумму членов определителя $|A|$. Поэтому будем иметь

$$|A| = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}(-1)^{S(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} =$$

$$= \sum_{(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)} a_{1\beta_1}a_{2\beta_2}\dots a_{n\beta_n}(-1)^{S(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)} = |A^{\mathrm{T}}|. \ \blacktriangle$$

Замечание. Полученный результат позволяет сделать вывод о том, что любое свойство определителя, справедливое для его строк, будет справедливым применительно к его столбцам, и наоборот, любое свойство, справедливое для столбцов, будет справедливым и для его строк. Действительно, поскольку при транспонировании матрицы определитель остается постоянным, а строки и столбцы меняются ролями, то любое утверждение, касающееся строк, должно быть справедливым и для столбцов, и наоборот. Поэтому в дальнейшем, учитывая это замечание, можно доказывать свойства определителя либо только для строк, либо только для столбцов, а справедливы они будут как для тех, так и для других.

Свойство 2. При перестановке двух строк или двух столбцов определитель меняет знак.

Доказательство. Если переставлены i-я и j-я строки ($i < j$), то в новом определителе каждый член может быть получен из соответствующего члена старого определителя: например, в члене $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{i\alpha_i}\dots a_{j\alpha_j}\dots a_{n\alpha_n}$ следует переставить сомножители $a_{i\alpha_i}$ и $a_{j\alpha_j}$. Таким образом, члены нового определителя с точностью до знака совпадают с членами старого. Выясним, как обстоит дело со знаками. Перестановка $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ..., \alpha_n)$, определяющая знак при члене старого определителя, отличается от перестановки $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n)$, определяющей знак при члене нового определителя, тем, что в последней переставлены два элемента: α_i и α_j. Таким образом, эти две перестановки имеют разную четность.

Таким образом, приближенно полагаем, что

$$\text{пл.}\, S = \sum_{i=1}^{N} \text{пл.}\, S_i \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\cos \nu_i}\, \text{пл.}\, G_i. \qquad (9.14)$$

Выразим теперь $\cos\nu$ как функцию точки поверхности S через функцию $z = f(x, y)$. Действительно, как известно из 8.3 [см. замечание и формулу (8.12)], вектор нормали к поверхности S, заданной явным уравнением, имеет вид

$$\bar{\mathbf{n}} = \pm\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), -1\right\}.$$

Следовательно, косинус нормали, образующей острый угол с осью Oz, вычисляется по формуле

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (9.14), находим, что

$$\text{пл.}\, S \approx \sum_{i=1}^{N} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_i)\right)^2}\ \text{пл.}\, G_i.$$

Очевидно, правая часть есть интегральная сумма для функции $\frac{1}{\cos\nu}$ по области G. Следовательно, при $\lambda_N \to 0$ приходим к формуле

$$\text{пл.}\, S = \iint\limits_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}\, dxdy.$$

Пример 9.6. Найти площадь части поверхности эллиптического параболоида $z = x^2 + y^2$, отсекаемой плоскостью $z = 1$ (рис. 9.10).

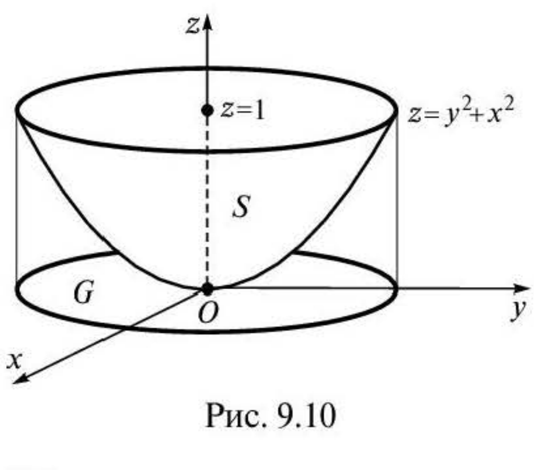


Рис. 9.10

Имеем

$$\text{пл.}\, S = \iint\limits_G \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dxdy,$$

где G — единичный круг. Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получаем, что

$$\text{пл.}\, S = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\rho\, d\rho\right) d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \frac{1}{8}\, d(1 + 4\rho^2) =$$

$$= (\text{замена } t = 1 + 4\rho^2) = \frac{\pi}{4}\int_1^5 \sqrt{t}dt = \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_{t=1}^{t=5} = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

В заключение укажем некоторые формулы использования двойных интегралов в механике.

Пусть плоская пластинка с плотностью $\rho(x, y) \ge 0$ занимает некоторую область G в плоскости $\mathbf{R}^2_{x,y}$, тогда координаты x_0, y_0 ее центра тяжести вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_G x\rho(x, y)dxdy, \quad y_0 = \frac{1}{M}\iint_G y\rho(x, y)dxdy,$$

где $M = \iint_G \rho(x, y)dxdy$ — масса пластинки.

Далее пусть I_x и I_y — моменты инерции той же пластинки относительно осей Ox и Oy соответственно.

Тогда

$$I_x = \iint_G y^2\rho(x, y)dxdy, \quad I_y = \iint_G x^2\rho(x, y)dxdy.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Пусть область G на плоскости x, y определяется неравенствами

$$a \le x \le b, \ 0 \le y \le f(x),$$

где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция.

Докажите, что

$$\iint_G dxdy = \operatorname{mes} G,$$

где $\operatorname{mes} G$ — площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = f(x)$.

2. Пусть G — треугольник на плоскости xOy с вершинами в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Запишите (двумя способами) двойной интеграл $\iint_G f(x, y)dxdy$ в виде повторных интегралов.

3. Пусть $U_R(x_0, y_0)$ — круг радиусом $R > 0$ с центром в точке (x_0, y_0), т.е.

$$U_R(x_0, y_0) = \{(x, y)\colon (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le R^2\}.$$

По определению, величина

$$I(x_0, y_0, R) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{U_R(x_0, y_0)} f(x, y)dxdy$$

называется круговым средним функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) радиусом R.

Докажите, что если $f(x, y)$ — непрерывная функция, то

$$\lim_{R \to 0} I(x_0, y_0, R) = f(x_0, y_0).$$

4. Вычислите следующие двойные интегралы:

1) $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где G — единичный круг с центром в начале координат;

2) $\iint\limits_G e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, где G — четверть единичного круга, расположенная в первом квадранте плоскости xOy;

3) $\iint\limits_G e^{x^2+y^2}\,dxdy$, где G — часть кругового сектора $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, расположенная в первом квадранте плоскости xOy.

5. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в круге $x^2 + y^2 \le R$ радиусом R за исключением начала координат, в котором она имеет неограниченную особенность.

Определим несобственный интеграл от функции $f(x, y)$ по формуле

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)\,dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{\varepsilon\le x^2+y^2\le R^2} f(x,y)\,dxdy$$

и назовем его сходящимся, если этот предел существует и конечен, и расходящимся — в противном случае.

Докажите следующее утверждение: несобственный интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} (x^2+y^2)^{\lambda}\,dxdy = \begin{cases} \text{сходится, если} \quad -2<\lambda<0; \\ \text{расходится, если} \quad \lambda \le -2. \end{cases}$$

6. Пусть S — плоская пластинка, ограниченная линиями $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$. Найдите:

1) массу пластинки S, если ее поверхностная плотность $\rho = x + 3y^2$;

2) координаты центра тяжести пластинки.

ГЛАВА 10
ОСНОВЫ ТЕОРИИ РЯДОВ

10.1. Числовые ряды

10.1.1. Ряды сходящиеся и расходящиеся

Бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком сложения,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{10.1}$$

называется *числовым рядом*.

Выражение

$$u_n = f(n), \tag{10.2}$$

где $f(n)$ — функция натурального аргумента, называется *общим членом* ряда.

Часто употребляют более короткую запись для ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Пусть дан ряд (10.1). Будем последовательно складывать его члены:

$$\begin{aligned}
&s_1 = u_1,\\
&s_2 = u_1 + u_2,\\
&s_3 = u_1 + u_2 + u_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{10. 3}$$

Эти суммы называются *частичными суммами* ряда (10.1). Таким образом, получается бесконечная числовая последовательность частичных сумм:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots \tag{10.4}$$

Рассмотрим ее предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Он может существовать или не существовать.

Определение 10.1. Если этот предел существует и, значит, конечен, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, то ряд (10.1) называется *сходящимся*, а число s — его суммой.

Если же этот предел бесконечен или вовсе не существует, то ряд (10.1) называется *расходящимся*.

В первом случае, т. е. когда ряд сходится, этот факт записывают в такой форме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

Во втором случае, если предел является бесконечностью определенного знака, то пишут $s = +\infty$ и $s = -\infty$, или выражают этот факт в такой форме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty.$$

Пример 10.1.

$$1)\ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Общий член ряда имеет вид:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Необходимо исследовать ряд на сходимость, для чего найдем его сумму, исходя из определения.

Имеем

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Каждое слагаемое этой суммы преобразуем по формуле

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}.$$

Получим

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

поскольку после раскрытия скобок обнаруживается, что все слагаемые, кроме первого и последнего, взаимно уничтожаются. Переход к пределу при $n \to \infty$ дает

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1.$$

Таким образом, ряд сходится и его сумма $s = 1$. Этот факт можно записать в виде

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Пример 10.2. Рассмотрим числовой ряд, называемый *геометрической прогрессией*,

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a\, q^{n-1},\ a \neq 0.$$

Для этого ряда общий член имеет вид: $u_n = aq^{n-1}$. Для частичной суммы

$$s_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}$$

можно, пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогрессии, получить следующее выражение (при $q \neq 1$):

$$s_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Теперь следует рассмотреть отдельно четыре случая:

а) $|q| < 1$, тогда $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$, т.е. ряд сходится и его сумма $s = \dfrac{a}{1-q}$;

б) $|q| > 1$, тогда $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, т.е. ряд расходится;

в) $q = -1$, тогда $s_n = \dfrac{a}{2}\left(1-(-1)^n\right)$; эта последовательность такова: a, 0, a, 0, ... и, поскольку $a \neq 0$, предела не имеет; это означает, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует и ряд расходится;

г) $q = 1$, в этом случае ряд имеет вид: $a + a + a + \ldots$ и $s_n = na$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует и ряд расходится.

Таким образом, геометрическая прогрессия, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ сходится, если $|q| < 1$, и расходится, если $|q| \geq 1$.

Пример 10.3. Исследуем на сходимость числовой ряд, называемый *гармоническим*:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Данный ряд расходится. Убедимся в этом. Возьмем частичную сумму ряда с номером $n = 2^k$, где k — натуральное число, и разобьем ее на k групп, следующим образом:

$$s_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}+2^{k-1}}\right).$$

Каждое из выражений, взятых в скобки, имеет одинаковую структуру, и все они, начиная со второго, могут быть представлены формулой

$$\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\dots+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}\right),$$

где $m = 1, 2, \ldots, k-1$. Заменяя знаменатель каждой дроби, кроме последней, бо́льшим числом, получим неравенство

$$\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\dots+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}\right)>$$

$$>\left(\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}+\dots+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}\right)=\left(\frac{2^{m-1}}{2^{m-1}+2^{m-1}}\right)=\frac{1}{2}.$$

Для первого слагаемого также верно это неравенство $\left(1+\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{2}$.

Таким образом, учитывая, что число всех групп равно k, получаем неравенство

$$s_n > k\frac{1}{2},$$

откуда следует, что при $n \to \infty$ s_n неограниченно возрастает, т.е. $s_n \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует и ряд расходится.

10.1.2. Необходимое условие сходимости ряда

Теорема 10.1. Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$, откуда получается $u_n = s_n - s_{n-1}$ и

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0. \ \blacktriangle$$

Замечание. Условие $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ называется необходимым условием сходимости ряда. Но на практике используется эквивалентное этому достаточное условие расходимости ряда: если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ (или вовсе не существует), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Пример 10.4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10\,000n+1}=\frac{1}{10\,001}+\frac{2}{20\,001}+\dots\ .$$

Общий член ряда

$$u_n=\frac{n}{10\,000n+1}=\frac{1}{10\,000+\frac{1}{n}}\to\frac{1}{10\,000} \text{ при } n\to\infty,$$

следовательно, рассматриваемый ряд расходится (не выполнено необходимое условие сходимости).

10.1.3. Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 10.2. Для того чтобы ряд (10.1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon \tag{10.5}$$

для всякого $n > N$ и для всех значений $p = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Пусть $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ — частичная сумма ряда (10.1). Составим последовательность частичных сумм $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$. Она сходится или не сходится одновременно с рядом (10.1).

Но для сходимости числовой последовательности s_n необходимо и достаточно, в силу критерия Коши, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$, как только $n > N$ и для всех значений $p = 1, 2, \ldots$. Но $s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+p}$, и условие $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ принимает вид (10.5). ▲

10.1.4. Свойства рядов

Свойство 1. Первое из свойств рядов можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 10.3. Пусть дан ряд (10.1); его сходимость или расходимость не изменятся, если к нему прибавить или от него отнять конечное число членов, может измениться только его сумма.

Доказательство. Рассмотрим ряд (10.1). Выделим первые k членов

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_n + \ldots$$

и обозначим $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k = A$. Если отбросить первые k членов, то получится ряд

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_n + \ldots \; . \tag{10.6}$$

Пусть $\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+n}$ — частичная сумма ряда (10.6), а $s_{n+k} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_n$ — частичная сумма ряда (10.1). Тогда очевидно, что $s_{n+k} = A + \sigma_n$, или $\sigma_n = s_{n+k} - A$.

Пусть теперь ряд (10.1) сходится. Тогда $s_{n+k} \to s$ при $n \to \infty$ и, следовательно, $\sigma_n \to s - A = \sigma$, т.е. ряд (10.6) тоже сходится. Его сумма σ отличается от суммы ряда (10.1) s на величину A.

Пусть теперь ряд (10.1) расходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+k}$ либо бесконечен, либо вовсе не существует. Тогда в силу соотношения $s_{n+k} = A + \sigma_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ не может существовать. Иначе, по теореме о пределе суммы двух числовых последовательностей, получилось бы, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+k}$ существует. Следовательно, ряд (10.6) тоже расходится. Таким образом, доказано, что если два ряда отличаются друг от друга на конечное число членов, то они сходятся либо расходятся одновременно. ▲

Свойство 2. Пусть дано, что ряд (10.1) сходится. Рассмотрим новый ряд:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots . \tag{10.7}$$

В силу свойства 1 этот ряд также сходится. Обозначим его сумму через r_n. Таким образом, $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$. Сумма этого ряда называется *остатком* ряда (10.1). Очевидно, что $s = s_n + r_n$, откуда следует, что $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Кроме того, величина $|r_n|$ является абсолютной погрешностью приближенного значения суммы ряда, получаемого по формуле $s \approx s_n$.

Свойство 3. Это свойство также сформулируем в виде теоремы.

Теорема 10.4. Пусть даны два сходящихся ряда:

$$s' = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{10.8}$$

$$s'' = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \tag{10.9}$$

Тогда ряд

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots, \tag{10.10}$$

полученный из рядов (10.8) и (10.9) их почленным сложением, также сходится и его сумма $s = s' + s''$.

Доказательство. Для частичной суммы ряда (10.10) $s_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots + (u_n + v_n)$ имеем очевидное равенство: $s_n = s'_n + s''_n$, переход к пределу при $n \to \infty$ в котором доказывает и сходимость ряда (10.10), и равенство $s = s' + s''$. ▲

Замечание. Очевидно, что аналогичный результат будет справедливым и для разности двух сходящихся рядов. Общий итог можно представить в такой форме: если ряды (10.8) и (10.9) сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n) \pm \sum_{n=1}^{\infty}(v_n).$$

Свойство 4. Свойство сформулируем в виде теоремы.

Теорема 10.5. Пусть имеется сходящийся ряд

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots . \tag{10.11}$$

Тогда для любого числа λ ряд

$$\lambda u_1 + \lambda u_2 + \lambda u_3 + \ldots + \lambda u_n + \ldots \tag{10.12}$$

сходится и его сумма равна λs.

Доказательство. Очевидно, что частичная сумма ряда (10.12) $\sigma n = \lambda s_n$, где s_n — частичная сумма ряда (10.11). Переходя к пределу в этом равенстве при $n \to \infty$, получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ существует и равен $\lambda \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lambda s$. Следовательно, ряд (10.12) сходится и его сумма равна λs. ▲

Замечание. Полученный результат можно представить в такой форме: если ряд (10.11) сходится, то ряд (10.12) тоже сходится, и общий множитель у всех членов ряда можно выносить за знак суммы, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

10.1.5. Ряды с положительными членами

Пусть дан ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{10.13}$$

члены которого положительны: $u_n > 0$. Тогда частичная сумма этого ряда

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

с увеличением n может только возрастать:

$$s_{n+1} = s_n + u_{n+1} > s_n.$$

Здесь возможны два случая:

а) если s_n растет неограниченно, то $s_n \to +\infty$, и ряд расходится;

б) если s_n остается ограниченной, т.е. $s_n < B$, то ряд сходится потому, что ограниченная сверху монотонно возрастающая последовательность s_n имеет предел. С другой стороны, если последовательность s_n имеет предел, то она ограничена. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 10.6. Для того чтобы ряд с положительными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной последовательностью.

Замечание. Следует отметить, что одной из основных задач, связанных с рядами, является задача исследования ряда на сходимость. Теорема 10.6, хотя и дает критерий сходимости ряда, имеет узкое применение, поскольку проверка ее условия (ограниченность последовательности s_n) не всегда возможна. Поэтому более эффективными оказываются так называемые признаки сходимости ряда, которые представляют собой только достаточные, но зато более легко проверяемые условия сходимости ряда. Эти признаки дополняются признаками расходимости ряда.

10.1.6. Теоремы сравнения для рядов с положительными членами

Теорема 10.7 (первая теорема сравнения). Пусть даны два ряда с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{10.14}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots . \tag{10.15}$$

Это приводит к тому, что знаки при рассматриваемых членах определителя в старом и новом определителе будут различными, что и доказывает изменение знака у всего определителя. Доказательство проведено для случая, когда переставляются две строки. В силу сделанного выше замечания результат будет справедлив и для двух столбцов. ▲

Свойство 3. Если в матрице определителя содержится две одинаковые строки, то такой определитель равен нулю. Аналогичный результат верен и для столбцов.

Доказательство. Если переставить две одинаковые строки, то с одной стороны, поскольку матрица определителя останется неизменной, определитель не изменится, а с другой, в силу свойства 2, он должен изменить знак. Это означает, что $|A| = -|A|$. Такое возможно только при $|A| = 0$. ▲

Свойство 4. Если в матрице определителя содержится строка, состоящая из одних нулей, то такой определитель равен нулю. Аналогичный результат верен и для столбцов.

Замечание. Строка, состоящая из одних нулей, называется нулевой строкой. Аналогично именуется нулевым столбец, состоящий из одних нулей.

Доказательство. Исходя из определения 2.7, представим его в виде суммы:

$$|A| = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}.$$

Теперь замечаем, что в каждом слагаемом один из множителей — представитель нулевой строки, равен нулю. Следовательно, все слагаемые рассматриваемой суммы равны нулю. Поэтому равна нулю и вся сумма, т. е. $|A| = 0$. ▲

Свойство 5. Если какая-нибудь строка или столбец содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 21 & 6 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

Доказательство. Пусть i-я строка матрицы определителя имеет вид $(a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \ldots \;\; a_{in}) = (\lambda a'_{i1} \;\; \lambda a'_{i2} \;\; \ldots \;\; \lambda a'_{in})$. Исходя из определения определителя, представим его в виде суммы:

$$|A| = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots \lambda a'_{i\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}.$$

И пусть для всех значений $k = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $u_k \le v_k$. Тогда:

а) если ряд (10.15) сходится, то сходится и ряд (10.14);

б) если ряд (10.14) расходится, то расходится и ряд (10.15).

Доказательство. Пусть

$$s'_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

$$s''_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n.$$

Тогда, в силу условия $u_k \le v_k$, будет справедливым неравенство

$$s'_n \le s''_n.$$

Докажем вначале случай а). Допустим, что ряд (10.15) сходится и его сумма равна s''. Тогда при любом n выполняется неравенство $s_n \le s''$ (поскольку s''_n — часть суммы положительных слагаемых, равной s''). Откуда следует, что

$$s'_n \le s''_n < s''.$$

Таким образом, доказано, что частичные суммы ряда s'_n ограничены. Применяя доказанное выше необходимое и достаточное условие сходимости ряда, получим, что ряд (10.14) сходится.

Перейдем теперь к случаю б). Допустим, что ряд (10.14) расходится. Тогда ряд (10.15) не может сходиться, так как из этого в силу только что доказанного случая а), сразу следовало бы, что ряд (10.14) сходится. А поскольку это не так, то ряд (10.15) расходится. ▲

Замечание. Требование о том, чтобы неравенства $u_k \le v_k$ выполнялись при всех значениях $k = 1, 2, \ldots$, можно ослабить и допустить, чтобы эти неравенства имели место при всех значениях k, начиная с некоторого номера $(k + 1)$. При этом утверждения теоремы останутся в силе. Действительно, этот случай может быть сведен к предыдущему путем отбрасывания первых k членов у обоих рядов. При этом сходимость или расходимость исходных и преобразованных рядов не изменится. Применяя к рядам с отброшенными членами теорему 10.7, возвращаемся к исходным рядам, добавляя те члены, которые были отброшены, и получаем, что результат верен и в рассматриваемом случае.

Пример 10.5. Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Исследуем вопрос о его сходимости с помощью первой теоремы сравнения. Для этого воспользуемся сходящимся рядом из примера 10.1:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \qquad (10.16)$$

У рассматриваемого ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ отбросим первый член. Новый ряд будет выглядеть так

$$\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}. \quad (10.17)$$

Его члены меньше соответствующих членов ряда (10.16). По первой теореме сравнения ряд (10.17) сходится. Добавляя к нему отброшенный первый член, получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который также обязан сходиться. Найти сумму этого ряда значительно труднее, чем у ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Без доказательства сообщим, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, где π = 3,14159265... — отношение длины окружности к длине ее диаметра.

Пример 10.6. Рассмотрим еще один ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Этот ряд расходится по первой теореме сравнения. Чтобы убедиться в этом, надо сравнить этот ряд с расходящимся рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

(гармонический ряд, см. пример 10.3). Действительно, при всех n имеет место неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{n},$$

из которого следует, что данный ряд расходится.

Теорема 10.8 (вторая теорема сравнения). Пусть имеются два ряда с положительными членами

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots, \quad (10.18)$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots. \quad (10.19)$$

И пусть существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=K,$$

где $K>0$. Тогда оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Доказательство. Поскольку $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=K$, пользуясь определением предела числовой последовательности, выбираем $\varepsilon=\frac{K}{2}>0$, для которого найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - K\right| < \varepsilon.$$

Это неравенство эквивалентно двойному неравенству

$$K - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < K + \varepsilon,$$

из которого следует (с учетом того, что $\varepsilon = \dfrac{K}{2} > 0$), что для всех $n > N$ будут выполняться такие неравенства:

$$\text{а) } u_n < \frac{3K}{2} v_n; \qquad \text{б) } v_n < \frac{2u_n}{K}.$$

Теперь, если сходится ряд (10.18), то из неравенства б) и первой теоремы сравнения (см. теорему 10.7) следует, что сходится ряд (10.19). Если же сходится ряд (10.19), то ряд (10.18) будет также сходиться, что следует из неравенства а) и первой теоремы сравнения. Таким образом, ряды (10.18) сходятся (а значит, и расходятся) одновременно. ▲

Замечание. Нетрудно доказать, что если $K = 0$, то из сходимости ряда (10.19) следует сходимость ряда (10.18), а обратное неверно. Меняя ролями ряды (10.18) и (10.19), получим, что если $K = +\infty$, то из сходимости ряда (10.18) следует сходимость ряда (10.19), а обратное неверно.

Пример 10.7. Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Исследуем его на сходимость с помощью второй теоремы сравнения. Для этого вспомним, что если α_n — бесконечно малая последовательность, то $\ln(1 + \alpha_n)$ также будет бесконечно малой последовательностью, причем эквивалентной α_n. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}} = 1 > 0$$

и рассматриваемый ряд сходится, поскольку (как нам уже известно) сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Пример 10.8. Анализируя ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

аналогично предыдущему, сравниваем его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Поскольку этот ряд расходится (см. пример 10.6), то, по второй теореме сравнения, получим, что и исследуемый ряд расходится.

10.1.7. Признаки Даламбера и Коши

Достаточные условия сходимости ряда обычно называют признаками сходимости. Иногда объединяют в одну группу как достаточные условия сходимости, так и достаточные условия расходимости ряда. Для рядов с положительными членами признаков сходимости довольно много. Ниже будут рассмотрены наиболее употребительные из них.

Теорема 10.9 (признак Даламбера). Пусть дан ряд с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{10.20}$$

и пусть существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho.$$

Тогда:

а) если $\rho < 1$, то ряд (10.20) сходится;

б) если $\rho > 1$, то ряд (10.20) расходится;

в) если $\rho = 1$, то вопрос о сходимости ряда (10.20) остается открытым.

Доказательство. Пусть имеет место случай а), т.е. $\rho < 1$. Между числами ρ и 1 находится число $q = \frac{\rho+1}{2}$. Действительно, имеем

$$\rho = \frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2} < \frac{\rho}{2}+\frac{1}{2} = \frac{\rho+1}{2} = q = \frac{\rho}{2}+\frac{1}{2} < \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Следовательно, выполняются неравенства $\rho < q < 1$. Возьмем положительное число $\varepsilon = q - \rho$. Для этого ε найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любого $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho\right| < \varepsilon,$$

которое эквивалентно двойному неравенству (с учетом того, что $\varepsilon = q - \rho$)

$$2\rho < \frac{u_{n+1}}{u_n} < q.$$

Из неравенства

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$$

следует, что при $n > N$ будет выполняться неравенство

$$u_{n+1} < qu_n.$$

Разделим правую и левую части этого неравенства на q^{n+1}. Получим

$$\frac{u_n}{q^n} > \frac{u_{n+1}}{q^{n+1}},$$

т. е. последовательность

$$a_n = \frac{u_n}{q^n} > \frac{u_{n+1}}{q^{n+1}} = a_{n+1}$$

монотонно убывает с ростом n и при этом ограничена снизу ($a_n > 0$). Следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{q^n} = K \geq 0.$$

По второй теореме сравнения для рядов с положительными членами получаем, что ряд (10.20) сходится, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$. Но этот ряд был рассмотрен в примере 10.2. Там было установлено, что он сходится при условии, что $|q| < 1$. Поскольку в нашем случае $0 < q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, а с ним — и ряд (10.20).

Рассмотрим теперь случай б):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > 1.$$

Здесь имеем $1 < q < \rho$. В качестве $\varepsilon > 0$ возьмем число $\rho - q$. Для него найдется номер $N' = N'(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N'$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho\right| < \varepsilon,$$

эквивалентное двойному неравенству, в котором заменим ε через $\rho - q$,

$$q < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 2\rho - q.$$

Пользуясь первой частью этого неравенства, получим

$$u_{n+1} > qu_n > u_n,$$

поскольку $q > 1$. Из этого неравенства следует, что последовательность $u_n > 0$ и монотонно возрастает. Следовательно, u_n не стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Отсюда следует, что ряд (10.20) расходится.

Чтобы доказать, что в случае в), когда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1,$$

из этого факта нельзя сделать никакого вывода о сходимости ряда, достаточно предъявить два ряда, для которых $\rho = 1$, один из которых сходится, а другой — расходится. Пример сходящегося ряда дает ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, рассмотренный в примере 10.5. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1.$$

Таким образом, $\rho = 1$ и ряд сходится. Другой пример расходящегося ряда дает ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, рассмотренный в примере 10.6. Для него имеем

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1.$$

Таким образом, $\rho = 1$ и ряд расходится. ▲

Замечание. Нетрудно распространить применение признака Даламбера и на тот случай, когда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty.$$

В этом случае ряд (1.19) расходится. Для доказательства заметим, что начиная с некоторого номера будет выполняться неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, из которого следует, что $u_{n+1} > u_n$. Следовательно, u_n не стремится к нулю и ряд расходится.

Пример 10.9. Пусть требуется исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

Применим признак Даламбера, для чего вычислим предел

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Поскольку $\rho < 1$, то, по признаку Даламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ сходится.

Пример 10.10. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}.$$

Применим признак Даламбера, для чего вычислим предел

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\dfrac{n!}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} = +\infty.$$

В силу замечания к признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ расходится.

Теорема 10.10 (признак Коши). Пусть дан ряд с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{10.21}$$

и пусть существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$. Тогда:

а) если $\rho < 1$, то ряд (10.21) сходится;

б) если $\rho > 1$, то ряд (10.21) расходится;

в) если $\rho = 1$, то вопрос о сходимости ряда (10.21) остается открытым.

Доказательство. Пусть имеет место случай а), т.е. $\rho < 1$. Как и выше, берем число $q = \dfrac{\rho + 1}{2}$, которое оказывается между числами ρ и 1: справедливы неравенства $\rho < q < 1$. Возьмем положительное число $\varepsilon = q - \rho$. Для этого ε найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любого $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left| \sqrt[n]{u_n} - \rho \right| < \varepsilon,$$

которое эквивалентно двойному неравенству (с учетом того, что $\varepsilon = q - \rho$):

$$2\rho < \sqrt[n]{u_n} < q.$$

Из неравенства

$$\sqrt[n]{u_n} < q$$

следует, что при $n > N$ будет выполняться неравенство

$$u_n < q^n.$$

Поскольку $q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. По первой теореме сравнения, сходится и ряд (10.21).

Рассмотрим теперь случай б): $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho > 1$. В этом случае имеем $1 < q < \rho$. В качестве $\varepsilon > 0$ возьмем число $\rho - q$. Для него найдется номер $N' = N'(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N'$ будет выполняться неравенство

$$\left|\sqrt[n]{u_n} - \rho\right| < \varepsilon,$$

эквивалентное двойному неравенству, в котором заменим ε через $\rho - q$,

$$q < \sqrt[n]{u_n} < 2\rho - q.$$

Пользуясь первой частью этого неравенства, получим, что

$$u_n > q^n.$$

Поскольку $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ расходится. По первой теореме сравнения расходится и ряд (10.21).

В случае в), т. е. когда $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, достаточно предъявить два ряда, удовлетворяющих этому условию, из которых один сходится, а другой расходится. Если вспомнить, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то станет очевидным, что в качестве двух искомых рядов можно взять ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ (сходится) и расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Для обоих рядов $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$. ▲

Замечание. Аналогично тому, как это делалось применительно к признаку Даламбера, можно показать, что в случае, когда $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$, ряд (10.21) расходится.

Общее замечание, касающееся как признака Даламбера, так и признака Коши, состоит в том, что если $\rho > 1$ или $\rho = +\infty$, то, как было видно из доказательств, общий член ряда не стремится к нулю (не выполняется необходимое условие сходимости).

Пример 10.12. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$ с помощью признака Коши. Имеем

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1.$$

По признаку Коши, ряд сходится.

Пример 10.13. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^5}$ с помощью признака Коши. Имеем

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^5} = 2 > 1.$$

Здесь было учтено, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

По признаку Коши, ряд расходится.

10.1.8. Интегральный признак сходимости

Теорема 10.11. Пусть $y = f(x)$ — функция, определенная при $x \geq 1$, непрерывная, положительная и монотонно убывающая. Рассмотрим ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (10.22)$$

где $u_n = f(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, и несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (10.23)$$

Тогда ряд (10.22) и интеграл (10.23) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Представим $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ как сумму интегралов по отрезкам $[1; 2]$, $[2; 3]$, $[3; 4]$, ..., $[n; n+1]$. Получаем равенство

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx.$$

Каждый из интегралов $\int_k^{k+1} f(x)\,dx$ представляет число, равное площади криволинейной трапеции $EBDF$ (рис. 10.1).

Поскольку функция $f(x)$ монотонно убывает, то площадь указанной трапеции оказывается меньше, чем площадь прямоугольника $EBCF$, и больше, чем площадь прямоугольника $EADF$. Площадь первого из них численно равна его высоте (так как длина основания равна единице), т.е. $f(k)$. Аналогично площадь второго прямоугольника равна $f(k + 1)$. Таким образом, имеем

$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x)\,dx < f(k),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

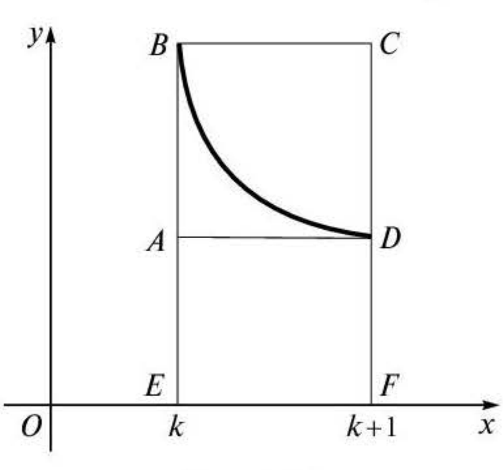


Рис. 10.1

Складывая эти неравенства, получим

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) < \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

причем

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) = S_{n+1} - u_1.$$

Сумма интегралов преобразуется в интеграл по формуле

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1} f(x)\,dx = \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx,$$

а последняя сумма $\sum_{k=1}^{n} f(k) = s_n$, где s_n — n-я частичная сумма рассматриваемого ряда. Итак, для любого n получены следующие неравенства:

$$s_{n+1} - u_1 < \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx < s_n. \qquad (10.24)$$

Теперь заметим, что из сходимости интеграла $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ вытекает, что при $n \to \infty$ существует предел числовой последовательности

$$\sigma_n = \int_{1}^{n} f(x)\,dx,$$

равный σ, который, в силу монотонного возрастания этой последовательности, больше, чем любой член σ_n. Поэтому если $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то для любого n справедливо неравенство

$$\int_{1}^{n} f(x)\,dx < \sigma.$$

Используя первое из неравенств (10.24), получим

$$s_{n+1} < u_1 + \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx < u_1 + \sigma.$$

Это неравенство показывает, что частичные суммы ряда (10.22) ограничены (справа стоит число, которое не зависит от n). Для рядов с положительными членами это условие является необходимым и достаточным для их сходимости. Следовательно, если интеграл (10.23) сходится, то сходится и ряд (10.22).

Пусть теперь дано, что ряд (10.22) сходится. Тогда любая частичная сумма s_n меньше, чем сумма всего ряда s, т. е. для любого n имеет место неравенство $s_n < s$. Из второй части неравенства (10.24) следует, что последовательность $\sigma_n = \int_{1}^{n} f(x)\,dx$ ограничена, ($\sigma_{n+1} = \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx < s_n < s$). Но монотонная и ограниченная последовательность является сходящейся. Следовательно, при $n \to \infty$ существует предел числовой последовательности $\sigma_n = \int_{1}^{n} f(x)\,dx$. Отсюда следует, что интеграл (10.23) сходится. ▲

Вынося общий множитель λ из-под знака суммы, получим

$$|A| = \lambda \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a'_{i\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} = \lambda |A^i|,$$

где $|A^i|$ — определитель, матрица которого отличается от матрицы A тем, что i-я ее строка имеет вид: $(a'_{i1} \;\; a'_{i2} \;\; \ldots \;\; a'_{in})$. ▲

Свойство 6. Если в матрице определителя содержатся две пропорциональные строки или два пропорциональных столбца, то такой определитель равен нулю.

Пропорциональность двух строк означает, что одна из них получается из другой путем умножения ее на некоторое число. Например, строки (1 3 5 7) и (–3 –9 –15 –21) пропорциональны, так как вторая из них получается из первой путем умножения всех ее элементов на число (–3), а первая получается из второй путем умножения на число $(-\frac{1}{3})$. Аналогично понимается пропорциональность двух столбцов.

Доказательство. Пусть i-я строка матрицы получается из j-й строки путем умножения последней на некоторое число λ. Тогда, пользуясь свойством 5, можно вынести за знак определителя общий множитель из i-й строки: число λ. Матрица оставшегося определителя $|A^i|$ будет иметь две одинаковые строки. По свойству 3 такой определитель равен нулю. Следовательно,

$$|A| = \lambda |A^i| = 0. \text{ ▲}$$

Свойство 7. Если в матрице определителя A какая-либо строка представлена как сумма двух строк:

$$(a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \ldots \;\; a_{in}) = (a'_{i1} + a''_{i1},\; a'_{i2} + a''_{i2},\; \ldots,\; a'_{in} + a''_{in}) =$$
$$= (a'_{i1} \;\; a'_{i2} \;\; \ldots \;\; a'_{in}) + (a''_{i1} \;\; a''_{i2} \;\; \ldots \;\; a''_{in}),$$

то определитель этой матрицы может быть представлен в виде суммы двух определителей, у каждого из которых в матрице A эта строка заменена одной из слагаемых строк. Аналогичный результат справедлив и для столбцов.

Доказательство. Из определения определителя получается равенство

$$|A| = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{i\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} =$$
$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots (a'_{i\alpha_i} + a''_{i\alpha_i}) \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} =$$
$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a'_{i\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} +$$
$$+ \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a''_{i\alpha_i} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} = |A'| + |A''|,$$

Пример 10.14. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, где $\alpha > 0$. Этот ряд удовлетворяет условиям интегрального признака сходимости. Соответствующий несобственный интеграл имеет вид: $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$. Про него известно, что он сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \le 1$. Следовательно, то же самое можно сказать про ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$: ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. В частности, при $\alpha = 1$ получается другое доказательство расходимости гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

10.1.9. Знакочередующиеся ряды

Определение 10.2. Рассмотрим ряд, у которого члены ряда по очереди меняют знак:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots, \qquad (10.25)$$

где все $u_n > 0$. Такой ряд называется *знакочередующимся* рядом.

Пример 10.14.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots. \qquad (10.26)$$

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости, который выражается в следующей теореме.

Теорема 10.12 (признак Лейбница). Пусть дан ряд (10.25), удовлетворяющий следующим требованиям:

1) члены ряда по абсолютному значению монотонно убывают, т. е.

$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots > u_n > \ldots;$$

2) общий член ряда при $n \to \infty$ стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Тогда ряд (10.25) сходится.

Доказательство. Возьмем частичную сумму ряда (10.25), содержащую четное число слагаемых, т. е. частичную сумму

$$s_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Поскольку все слагаемые, заключенные в скобки, положительны (в силу монотонного убывания последовательности u_n), то с ростом m последовательность s_{2m} монотонно возрастает: с увеличением m добавляются новые положительные слагаемые. Теперь перепишем в другом виде выражение для s_{2m}:

$$s_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_{2m-2} + u_{2m-1} - u_{2m} =$$
$$= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Все слагаемые, заключенные в скобки, положительны, как и последнее слагаемое. Поэтому

$$s_{2m} < u_1.$$

Итак, получено, что последовательность s_{2m} монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно, существует предел

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s.$$

Теперь рассмотрим частичную сумму ряда (10.25), содержащую нечетное число слагаемых,

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}.$$

Для нее имеем

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = s,$$

так как $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$ (по условию теоремы, последовательность u_n имеет предел, равный нулю, тогда любая ее подпоследовательность, в частности u_{2m+1}, имеет тот же предел). Таким образом, две подпоследовательности последовательности s_n: s_{2m} и s_{2m+1} имеют общий предел, равный s. Этого достаточно, чтобы утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Действительно, если имеется произвольное $\varepsilon > 0$, для него найдутся номера $N_1 = N_1(\varepsilon)$ и $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такие, что при выполнении условий $2m > N_1$ и $2m + 1 > N_2$ будут верными неравенства:

$$|s_{2m} - s| < \varepsilon \text{ и } |s_{2m+1} - s| < \varepsilon.$$

Если обозначить через

$$N = N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\},$$

т.е. наибольшее из чисел N_1 и N_2, то при выполнении условия $n > N = N(\varepsilon)$ будет верным неравенство $|s_n - s| < \varepsilon$ независимо от того, является ли n четным или нечетным. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Это означает, что ряд (10.25) сходится. ▲

Пример 10.15. Рассмотрим ряд (10.26)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots .$$

Для него $u_n = \dfrac{1}{n}$. Эта последовательность, монотонно убывая, стремится к нулю, т.е. выполнены оба условия признака Лейбница. Следовательно, ряд (10.26) сходится.

10.1.10. Знакопеременные ряды

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{10.27}$$

удовлетворяющий условию: его члены $u_n \neq 0$ и имеют произвольные знаки.

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{10.28}$$

будет рядом с положительными членами, и к нему применимы те подходы, которые были разобраны выше. На вопрос о связи между сходимостью ряда (10.27) и ряда (10.28) дает ответ следующая теорема.

Теорема 10.13. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Доказательство. По критерию Коши сходимости рядов, для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при любом $n > N$ и любом p выполнялось бы неравенство

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon. \tag{10.29}$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то, по тому же критерию Коши (имея в виду, что его условие является и необходимым), получим, что для выбранного выше $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при при любом $n > N$ и любом p будет выполняться неравенство

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Из этого неравенства следует, что при любом $n > N$ и любом p будет выполняться достаточное для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ условие (10.29). Действительно, имеем

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Здесь использовано известное из курса математики средней школы неравенство $|a + b| \leq |a| + |b|$, т. е. модуль суммы не превосходит суммы модулей каждого из слагаемых. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по критерию Коши. ▲

Замечание. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ не вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Действительно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, как было показано выше, сходится, а ряд из модулей его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический ряд) расходится.

Пример 10.16. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\sqrt{2})}{n^2}.$$

Этот ряд сходится, так как сходится ряд, составленный из модулей его членов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\sin(n\sqrt{2})\right|}{n^2}$ (по первой теореме сравнения для рядов с положительными членами в силу неравенства

$$\frac{\left|\sin(n\sqrt{2})\right|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$).

Определение 10.3. В том случае, когда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится условно.*

Определение 10.4. В том случае, когда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится вместе с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится абсолютно.*

Например, рассмотренный выше ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

сходится условно, так как расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\sqrt{2})}{n^2}$$

сходится абсолютно, потому что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\sin(n\sqrt{2})\right|}{n^2}$ сходится.

10.1.11. Признаки абсолютной сходимости рядов

Поскольку ряд, составленный из модулей членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, является рядом с положительными членами, то к нему применимы некоторые из признаков сходимости для таких рядов. Если будет установлена сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то по теореме 10.13 будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. Поэтому достаточные условия сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ являются достаточными условиями сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. С другой стороны, достаточные условия расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ не являются, вообще говоря, условиями расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, так как последний ряд может сходиться условно. Тем не менее признаки Даламбера и Коши удается использовать и в случае, когда в силу этих признаков ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится.

Теорема 10.14 (признак абсолютной сходимости Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, члены которого имеют произвольные знаки. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, и пусть существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\rho.$$

Тогда, если $\rho<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится абсолютно; если $\rho>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится; если $\rho=1$, то про сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ничего сказать нельзя.

Доказательство. В случае, когда $\rho<1$, по признаку Даламбера для рядов с положительными членами, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ сходится и, по теореме 10.13, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. Поскольку ряд сходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то сходимость его будет абсолютной. В случае, когда $\rho>1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ будет расходиться по признаку Даламбера, при этом, как видно из доказательства этого случая, ряд расходится по той причине, что общий член ряда не стремится к нулю (не выполняется необходимое условие сходимости). Следовательно, в случае, когда $\rho>1$, получится, что $\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$. Но из этого следует, что $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$, и необходимое условие сходимости не выполняется уже для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и, следовательно, он расходится. При $\rho=1$, как это делалось при доказательстве признака Даламбера, можно рассмотреть два ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right).$$

Первый их них, как было показано выше, сходится, а второй — расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю. Для обоих рядов $\rho = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)} = 1. \blacktriangle$$

Теорема 10.15 (признак абсолютной сходимости Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого имеют произвольные знаки. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, и пусть существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$. Тогда, если $\rho < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно; если $\rho > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится; если $\rho = 1$, то про сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ничего сказать нельзя.

Доказательство. Рассуждения в случае признака Коши вполне аналогичны тем, что были изложены при доказательстве признака абсолютной сходимости Даламбера, включая примеры для случая $\rho = 1$. Действительно, для сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Для расходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = 1. \blacktriangle$$

10.2. Функциональные ряды

10.2.1. Область сходимости функционального ряда

Определение 10.5. Пусть имеется бесконечная последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots, \tag{10.30}$$

где все функции определены на общем множестве $G \subset \mathbf{R}^1$.

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \qquad (10.31)$$

называется *функциональным* рядом.

Положим $x = x_0$. Получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, который может сходиться или расходиться.

Определение 10.6. Если этот ряд сходится, то точка $x = x_0$ называется *точкой сходимости* ряда (10.31), а если расходится — *точкой расходимости*.

Определение 10.7. Совокупность всех точек сходимости ряда (10.31) называется *областью сходимости* ряда (10.31).

Область сходимости ряда (10.31) будем обозначать через Ω.

Пример 10.17. Пусть требуется найти область сходимости ряда

$$e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + 4e^{4x} + \ldots + ne^{nx} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{nx}. \qquad (10.32)$$

Поскольку при любом x $ne^x > 0$, то ряд (10.32) является рядом с положительными членами и можно применить признак Даламбера. Имеем

$$u_n = ne^{nx},\ \rho = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{(n+1)x}}{ne^{nx}} = \lim_{n\to\infty} e^x\,\frac{(n+1)}{n} = e^x.$$

Таким образом, $\rho = e^x$, т.е. является функцией от x. Множество тех значений x, для которых $\rho < 1$ (обозначим его через Ω_1), по признаку Даламбера, содержится в области сходимости ряда, т.е. $\Omega_1 \subset \Omega$. Чтобы определить это множество, следует решить неравенство $e^x < 1$. Очевидно, что для x должно выполняться неравенство $x < 0$. Таким образом, $\Omega_1 = \{x \mid x < 0\}$. Множество тех значений x, для которых $\rho > 1$ (обозначим его через Ω_2), по признаку Даламбера, не содержится в области сходимости ряда, т.е. $\Omega_2 \not\subset \Omega$. Чтобы определить это множество, следует решить неравенство $e^x > 1$. Очевидно, что для x должно выполняться неравенство $x > 0$. Таким образом, $\Omega_2 = \{x \mid x > 0\}$, и для всех x, кроме $x = 0$, решен вопрос о принадлежности к области сходимости ряда. При $x = 0$ имеем: $u_n = n$ и видно, что при $n \to \infty$ общий член ряда не стремится к нулю, что влечет расходимость ряда. Следовательно, точка $x = 0$ и не принадлежит области сходимости. Итак, $\Omega = \{x \mid x < 0\}$.

10.2.2. Равномерная сходимость функционального ряда

Пусть имеется функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

для которого областью сходимости является отрезок $[a, b]$. Это означает, что ряд сходится в каждой точке этого отрезка.

Таким образом, сумма этого ряда, определена в каждой точке отрезка и представляет собой функцию от x, заданную на этом отрезке. Обозначим ее через $s(x)$. Следовательно, по определению суммы ряда, для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x \in [a, b]$ найдется номер $N = N(\varepsilon, x)$ такой, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$. Эту обычную сходимость функционального ряда иногда называют *поточечной сходимостью*, или *сходимостью в каждой точке*. Она не очень удобна, поскольку не всегда позволяет производить с рядами и их суммами операции, используемые в математическом анализе. Например, менять порядок операций таких, как переход к пределу и суммирование ряда.

Если ряд сходится в каждой точке отрезка $[a, b]$, то без дополнительных условий не всегда будет выполняться равенство

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Аналогично обстоит дело и с другими операциями математического анализа. Дополнительные условия на сходимость ряда оказалось эффективным формулировать в терминах так называемой равномерной сходимости ряда.

Определение 10.8. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на $[a, b]$, если и только если он сходится в каждой точке отрезка $[a, b]$ к сумме $s(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий от ε и не зависящий от x, такой, что при $n > N$ для любого $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Термин «равномерная сходимость» вполне соответствует по смыслу характеру сходимости ряда на отрезке: ряд сходится таким образом, что во всех точках отрезка приближение с ростом n последовательности $s_n(x)$ к своему пределу $s(x)$ происходит равномерно, т. е. для получения приближения частичной суммы ряда $s_n(x)$ к сумме ряда $s(x)$ с точностью до $\varepsilon > 0$ во всех точках отрезка достаточно одинаковой величины n: $n > N(\varepsilon)$.

10.2.3. Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Этот критерий, как и критерий сходимости числового ряда, основан на критерии Коши сходимости числовых последовательностей.

Теорема 10.16 (критерий Коши равномерной сходимости). Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий от ε и не зависящий от x, такой, что при $n > N$ и любом натуральном р для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий от ε и не зависящий от x, такой, что при $n > N$ и любом натуральном p для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости ряда следует, что для $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ найдется номер $N = N\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ такой, что при $n > N$ и для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку $n + p > N$, то

$$|s(x) - s_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $x \in [a, b]$. Пользуясь этими неравенствами, получаем

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| = |s_{n+p}(x) - s(x) + s(x) - s_n(x)| \le$$

$$\le |s_{n+p}(x) - s(x)| + |s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $x \in [a, b]$, что и требовалось доказать.

Теперь доказываем достаточность. Дано, что условия критерия Коши выполнены. Надо доказать, что ряд сходится равномерно.

Из критерия Коши для числовых последовательностей следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится в каждой точке $x \in [a, b]$. Обозначим его сумму через $s(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Возьмем $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. По условию теоремы найдется номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий от ε и не зависящий от x, такой, что при $n > N$ и любом натуральном p для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при $p \to \infty$. Получим, что

$$\lim_{p\to\infty}|s_{n+p}(x) - s_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ т.е. при } n > N(\varepsilon)$$

и любом $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Это, по определению, означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. ▲

10.2.4. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда

Выяснение вопроса о равномерной сходимости ряда часто оказывается более простым, чем на основе определения, если пользоваться достаточными условиями равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, называемыми признаками равномерной сходимости. Наиболее употребительным из них является признак Вейерштрасса.

Теорема 10.17 (признак Вейерштрасса). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, рассматриваемого на отрезке $[a, b]$, существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ такой, что для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ и любого $x \in [a, b]$ выполняются неравенства

$$|f_n(x)| \le c_n.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. По первой теореме сравнения для рядов с положительными членами получается, что в каждой точке отрезка $[a, b]$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, откуда следует, что в каждой точке этого отрезка сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (по теореме 10.13). Обозначим его сумму через $s(x)$, сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ — через σ, а его n-ю частичную сумму — через σ_n. Тогда

$$\sigma - \sigma_n = c_{n+1} + c_{n+2} + c_{n+3} + \ldots = r_n$$

— остаток числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Он стремится к нулю при $n \to \infty$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N$ будет выполняться неравенство $|r_n| < \varepsilon$. Но из неравенств $|f_n(x)| \le c_n$ следует, что все $c_n \ge 0$. Поэтому $|r_n| = r_n$.

Таким образом, при $n > N$

$$r_n = c_{n+1} + c_{n+2} + c_{n+3} + \ldots < \varepsilon.$$

где $|A'|$ и $|A''|$ — определители, матрицы которых получены из матрицы A заменой i-й строки строками $(a'_{i1}\ a'_{i2}\ \ldots\ a'_{in})$ и $(a''_{i1}\ a''_{i2}\ \ldots\ a''_{in})$ соответственно. ▲

Свойство 8. Определитель не изменится, если в его матрице к какой-либо строке прибавить другую строку, умноженную на любое число. Аналогичный результат справедлив и для столбцов.

Доказательство. Пусть в матрице определителя A к i-й строке прибавляется j-я строка, умноженная на число λ. Эта преобразованная i-я строка будет иметь следующий вид: $(a_{i1} + \lambda a_{j1},\ a_{i2} + \lambda a_{j2},\ \ldots,\ a_{in} + \lambda a_{jn})$, т.е. будет суммой двух строк. Используя свойство 7, определитель можно представить в виде суммы двух определителей. Первый из них равен $|A|$, второй — нулю как определитель, в матрице которого две строки пропорциональны: i-я и j-я строки. Следовательно, определитель преобразованной матрицы равен $|A|$, т.е. исходному. ▲

Рассмотрим далее некоторую систему строк $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k$, где B_i — строки, которые можно рассматривать как матрицы, состоящие из одной строки и n столбцов, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пользуясь операциями сложения матриц и умножения их на число, можно построить новую матрицу-строку по формуле $C = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_k B_k$, где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k$ — произвольные числа.

Эта строка C называется *линейной комбинацией* строк $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k$.

Свойство 9. Определитель матрицы не изменится, если к какой-либо ее строке прибавить линейную комбинацию других ее строк. Аналогичный результат справедлив и для столбцов.

Доказательство. Получить матрицу с прибавленной к какой-то строке линейной комбинацией других строк $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_k B_k$ можно, последовательно прибавляя сначала $\lambda_1 B_1$, затем $\lambda_2 B_2$ и т.д. Последней будет прибавлена строка $\lambda_k B_k$. На каждом шаге определитель не меняется в силу свойства 8.Следовательно, он не изменится, когда будет закончено прибавление всех слагаемых, т.е. всей линейной комбинации $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_k B_k$. ▲

Свойство 10. Если какая-либо строка матрицы определителя может быть представлена как линейная комбинация остальных строк, то в этом случае определитель равен нулю. Аналогичный результат справедлив и для ее столбцов.

Доказательство. Если какая-то строка представляется как линейная комбинация других строк, то, не изменяя величины определителя, можно вычесть (прибавить, умножив на -1) эту линейную комбинацию из этой строки. В результате проведенной операции строка станет нулевой и, в силу свойства 4, определитель равен нулю. Следовательно, и исходный определитель равен нулю. ▲

Прежде чем рассматривать очередное свойство определителя, введем некоторые новые понятия. Представим определитель в следующем виде:

Теперь имеем для любого $x \in [a, b]$

$$|s(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \ldots| \le$$
$$\le |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + |f_{n+3}(x)| + \ldots .$$

Это неравенство получается предельным переходом в неравенстве для частичных сумм сходящихся рядов $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ и $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|$. Действительно,

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+m}(x)| \le |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \ldots + |f_{n+m}(x)|$$

и предельный переход при $m \to \infty$ приводит к приведенному выше неравенству.

Теперь, пользуясь неравенствами $|f_n(x)| \le c_n$, получаем

$$|s(x) - s_n(x)| \le |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + |f_{n+3}(x)| + \ldots \le c_{n+1} + c_{n+2} + c_{n+3} + \ldots < \varepsilon.$$

Здесь также применяется предельный переход в неравенстве

$$|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + |f_{n+3}(x)| + \ldots + |f_{n+m}(x)| \le c_{n+1} + c_{n+2} + c_{n+3} + \ldots + c_{n+m}$$

при $m \to \infty$. Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найден номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N$ для любого $x \in [a, b]$ будет выполняться неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

Это означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. ▲

Замечание. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, для которого справедливы неравенства

$$|f_n(x)| \le c_n,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

называется *мажорирующим* рядом. Теперь можно кратко сформулировать признак Вейерштрасса так: если на отрезке $[a, b]$ у ряда существует мажорирующий ряд, то ряд сходится равномерно на этом отрезке.

Пример 10.18. Рассмотрим на произвольном отрезке $[a, b]$ функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. Нетрудно убедиться в том, что у этого ряда мажорирующим будет ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Действительно, ряд этот сходится. При всех $x \in [a, b]$ и при всех $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ имеют место неравенства $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. Применяя признак Вейерштрасса, получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ сходится равномерно на любом отрезке $[a, b]$.

10.2.5. Общие свойства функциональных рядов

Свойства функциональных рядов выражаются в следующих теоремах.

Теорема 10.18 (о непрерывности суммы ряда). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, причем все члены ряда непрерывны на этом отрезке, то и сумма ряда непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости ряда найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N$ для любого $x \in [a, b]$ будет выполняться неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $x = x_0$ произвольная фиксированная точка отрезка $[a, b]$. Тогда при $n > N$ будут выполняться неравенства:

$$|s(x_0) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |s(x_0 + \Delta x) - s_n(x_0 + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Рассмотрим

$$|s(x_0 + \Delta x) - s(x_0)| =$$

$$= |[s(x_0 + \Delta x) - s_n(x_0 + \Delta x)] + [s_n(x_0 + \Delta x) - s_n(x_0)] + [s_n(x_0) - s(x_0)] \le$$

$$\le |s(x_0 + \Delta x) - s_n(x_0 + \Delta x)| + |s_n(x_0 + \Delta x) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)|.$$

Поскольку члены ряда непрерывны в точке x_0, то будет непрерывной и конечная сумма непрерывных слагаемых: функция $s_n(x)$. Поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что при $|\Delta x| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$|s_n(x_0 + \Delta x) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, для заданного $\varepsilon > 0$ найдено $\delta > 0$ такое, что при $|\Delta x| < \delta$ имеем

$$|s(x_0 + \Delta x) - s(x_0)| \le |s(x_0 + \Delta x) - s_n(x_0 + \Delta x)| +$$

$$+ |s_n(x_0 + \Delta x) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Это означает, что функция $s(x)$ непрерывна в точке x_0. ▲

Теорема 10.19 (о почленном интегрировании ряда). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, причем все члены ряда непрерывны на этом отрезке, то

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что сумма ряда $s(x)$ по теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда является непрерывной и поэтому

$$\sigma = \int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

существует, так как непрерывная функция является интегрируемой.

Теперь рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Пусть $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_a^b f_k(x)dx$ — его частичная сумма. Оценим величину $|\sigma - \sigma_n|$. Имеем

$$|\sigma - \sigma_n| = \left| \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)dx \right| = \left| \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx - \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\,dx \right| \le \int_a^b \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| dx.$$

Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости ряда найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N$ для любого $x \in [a, b]$ будет выполняться неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}.$$

Таким образом, если $n > N$, то

$$|\sigma - \sigma_n| \le \int_a^b \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| dx < \frac{\varepsilon}{(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{(b-a)} (b - a) = \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность частичных сумм σ_n ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$ сходится к

$$\sigma = \int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx,$$

т. е. σ является суммой этого ряда. Поэтому

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx. \blacktriangle$$

Теорема 10.20 (о почленном дифференцировании ряда). Пусть имеется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, члены которого $f_n(x)$ определены и непрерывны вместе со своими производными $\dfrac{df_n}{dx}(x)$ на интервале (a, b), причем сам ряд сходится в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$. Пусть, кроме того, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{df_n}{dx}(x)$ сходится равномерно на каждом $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на всем интервале (a, b), его сумма дифференцируема на (a, b) и

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dx}(x).$$

Доказательство этой теоремы здесь не приводим.

Замечание. Можно доказать, что при выполнении условий теоремы сам ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ не только сходится в каждой точке интервала (a, b), но и сходится равномерно на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

10.3. Степенные ряды

Определение 10.9. *Степенным рядом* называется ряд следующего вида:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \qquad (10.33)$$

Эти ряды являются частным, но очень важным случаем функциональных рядов. Общий член ряда (10.33) имеет вид

$$f_n(x) = c_n x^n, \; n = 0, 1, \ldots .$$

Числа c_n называются *коэффициентами степенного ряда*. Рассматриваются также ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

называемые *степенными рядами в точке* x_0. Эти ряды сводятся к предыдущим заменой $z = (x - x_0)$.

Ряд (10.33) всегда сходится в точке $x = 0$. Возникает вопрос: есть ли у этого ряда другие точки сходимости?

Теорема 10.21 (теорема Абеля). Если степенной ряд (10.33) сходится при некотором значении $x = x_1 \neq 0$, то этот ряд сходится и притом абсолютно при каждом значении $x = x_2$ таком, что $|x_2| < |x_1|$.

Доказательство. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится, то общий член ряда должен стремиться к нулю при $n \to \infty$, т.е. последовательность $\{c_n x_1^n\}$ является сходящейся. А так как всякая сходящаяся последовательность является ограниченной, то найдется положительное число M такое, что для всех n будет выполняться неравенство

$$|c_n x_1^n| \le M.$$

Пусть теперь $x = x_2$ таково, что $|x_2| < |x_1|$. Тогда

$$\left|c_n x_2^n\right| = \left|c_n x_1^n\right| \left|\frac{x_2}{x_1}\right|^n.$$

Обозначив $q = \left|\frac{x_2}{x_1}\right|$, получим, что для q справедливы неравенства: $0 < q < 1$. Таким образом, имеет место оценка $|c_n x_2^n| \le Mq^n$ при любых значениях n, из которой следует (по первой теореме сравнения), что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|c_n x_2^n\right|$ сходится, поскольку сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n$ (геометрическая прогрессия со знаменателем $0 < q < 1$). По теореме 10.13 получаем, что сходится и притом абсолютно ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_2^n$. ▲

Следствие. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится при $x = x_0$, то он будет расходиться при любом x таком, что $|x| > |x_0|$.

Доказательство. Действительно, если бы при x таком, что $|x| > |x_0|$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходился, то по теореме Абеля должен был бы сходиться ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$, что противоречит данному условию. ▲

10.3.1. Радиус сходимости степенного ряда

Изучая область сходимости степенного ряда, следует обратить внимание на тот факт, что если он сходится в какой-то точке $x_0 \ne 0$, то, по теореме Абеля, весь интервал $(-|x_0|, |x_0|)$ содержится в области сходимости этого ряда.

Действительно, любая точка $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ удовлетворяет неравенству $|x| < |x_0|$. По теореме Абеля, ряд в этой точке сходится, т.е. $x \in \Omega$. Если $|x_0|$ может быть сколь угодно большим, то в этом случае ряд будет сходиться при всех значениях x. Такие ряды существуют. Например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, ($0!$, по определению, считаем равным 1) является таким рядом.

Покажем это. Рассмотрим ряд из модулей его членов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$. Пусть $x \ne 0$.

Тогда этот ряд является рядом с положительными членами. Применим признак Даламбера для решения вопроса о его сходимости. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}n!}{|x|^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)}=0<1.$$

Таким образом, при любом x ряд сходится, поскольку сходится ряд из его модулей (по теореме 10.13).

Рассмотрим теперь другой пример, в котором степенной ряд сходится только в одной точке $x=0$. Это ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$. Действительно, рассматривая ряд, составленный из модулей его членов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!|x|^n$ и применяя к нему признак Даламбера, получим

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)!|x|=+\infty.$$

В силу замечания к признаку Даламбера для случая, когда $\rho=+\infty$, и замечания к теореме 10.13 ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ расходится при любом $x\neq 0$.

Пусть теперь у степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ есть как точка сходимости x_1, отличная от точки $x=0$, так и точка расходимости x_2. По теореме Абеля для всех x таких, что $|x|>|x_2|$, ряд расходится. Следовательно, множество точек сходимости ряда ограничено, а значит, является ограниченным множество чисел $|x|$, представляющих расстояния точек сходимости до начала координат. Всякое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань. Поэтому существует конечное число $R=\sup\{|x|\}$, где $x\in\Omega$.

Определение 10.10. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, если оно равно $\sup\{|x|\}$, где $x\in\Omega$, когда Ω отлично от одной точки или всей числовой оси. Если $\Omega=\{0\}$, т.е. ряд сходится только при $x=0$, то, по определению, полагается $R=0$. В случае, когда ряд сходится при любом x, по определению, полагается $R=\infty$.

10.3.2. Интервал сходимости степенного ряда

Определение 10.11. *Интервалом сходимости* ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ называется интервал $(-R, R)$, где R — радиус сходимости ряда.

Прежде всего покажем, что в любой точке этого интервала ряд сходится.

Пусть $R > 0$ и точка $x_0 \in (-R, R)$. Это значит, что $|x_0| < R$. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{R - |x_0|}{2}$. Тогда, по определению радиуса сходимости и по свойству верхней грани множества в интервале $(R - \varepsilon,\ R)$, найдется число $|x_1|$ такое, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ будет сходиться. Но

$$|x_1| > R - \varepsilon = \frac{R + |x_0|}{2} > \frac{|x_0| + |x_0|}{2} = |x_0|.$$

По теореме Абеля, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ сходится и притом абсолютно.

Итак, если $|x| < R$, то степенной ряд в точке x сходится. С другой стороны, из определения верхней грани следует, что не существует точек сходимости ряда, для которых выполняется неравенство $|x| > R$. Это означает, что, если выполняется это неравенство, то ряд расходится. Остается неизученным случай, когда $|x| = R$, или $x = \pm R$. Здесь общая закономерность отсутствует: существуют ряды, у которых имеет место сходимость в обеих точках $x = \pm R$; существуют такие, у которых имеет место сходимость только в одной из этих точек; и наконец, есть такие ряды, которые расходятся в обеих точках. Приведенные ниже примеры демонстрируют эти случаи. Но прежде чем мы обратимся к этим примерам, необходимо обсудить вопрос о том, как находить радиус сходимости.

Один из способов связан с применением признака Даламбера к ряду, составленному из модулей членов степенного ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$. В результате получим

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}||x|^{n+1}}{|c_n||x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}||x|}{|c_n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1,$$

если

$$|x| < \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

и $\rho(x) > 1$, если

$$|x| > \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}.$$

В силу замечания к признаку Даламбера для случая $\rho > 1$ и в силу теоремы 10.13 получаем, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$, то он и равен радиусу сходимости ряда. Итак,

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}, \tag{10.34}$$

если этот предел существует. Если он бесконечен, то следует считать, что $R = \infty$.

Аналогично, используя признак сходимости Коши, можно получить для радиуса сходимости такую формулу:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}, \tag{10.35}$$

если этот предел существует. При этом считаем, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, то $R = \infty$, а если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$, то $R = 0$.

Пример 10.19. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Найдем его радиус сходимости по формуле (10.34). В нашем случае

$$c_n = |c_n| = \frac{1}{n^2}; \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Теперь рассмотрим ряд в граничных точках интервала сходимости $(-1, 1)$, т.е. при $x = \pm 1$. При $x = 1$ получается сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (по интегральному признаку сходимости), а при $x = -1$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, который сходится в силу теоремы 10.13. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ сходится на обоих концах своего интервала сходимости. Его областью сходимости будет $[-1, 1]$, т.е. интервал сходимости не совпадает с областью сходимости.

Пример 10.20. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Для него находим

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)} = 1.$$

Исследование вопроса о сходимости ряда на концах интервала сходимости $(-1, 1)$ приводит к двум рядам: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Первый из них был рассмотрен выше и является сходящимся. Второй, известный под названием гармонического ряда, расходится. Таким образом, область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ представляет собой полуинтервал $[-1, 1)$.

Пример 10.21. Дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Для него $c_n = |c_n| = 1$. Найдем его радиус сходимости по формуле (10.35). Имеем

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = 1.$$

Следовательно интервал $(-1,1)$ будет для этого ряда интервалом сходимости. Исследование граничных точек интервала сходимости приводит к рядам $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(+1)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, которые являются расходящимися (общий член ряда не стремится к нулю, не выполнено необходимое условие сходимости ряда). Поэтому для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ область сходимости совпадает с интервалом сходимости: $(-1,1)$.

Таким образом, разобранные примеры показывают, что область сходимости степенного ряда может отличаться от интервала сходимости не более чем двумя точками $x=\pm R$, которые не входят в интервал сходимости, но могут входить в область сходимости.

10.3.3. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда

Теорема 10.22 (о равномерной сходимости степенного ряда). Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ с радиусом сходимости $R\neq 0$. В таком случае на всяком отрезке $[-r,r]\subset(-R,R)$, $(r>0)$ ряд сходится равномерно.

Доказательство. Из включения $[-r,r]\subset(-R,R)$ следует, что $r<R$. Тогда $x=r$ принадлежит интервалу сходимости и поэтому сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|c_n r^n\right|$. Он является мажорирующим рядом для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ на отрезке $[-r,r]$, так как для любого $x\in[-r,r]$ выполняются неравенства $|c_n x^n|\le|c_n r^n|$. По признаку Вейерштрасса равномерной сходимости, получаем, что на отрезке $[-r,r]$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ сходится равномерно. ▲

Следствие. При выполнении условий теоремы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ сходится равномерно на любом отрезке $[\alpha,\beta]\subset(-R,R)$.

Доказательство. Для любого отрезка $[\alpha,\ \beta]\subset(-R,R)$ можно найти отрезок $[-r,r]$ такой, что $[\alpha,\beta]\subset[-r,r]\subset(-R,R)$. Из равномерной сходимости ряда на отрезке $[-r,r]$ следует равномерная сходимость ряда на отрезке $[\alpha,\beta]$. ▲

Теорема 10.23 (о непрерывности суммы степенного ряда). Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ с радиусом сходимости $R\neq 0$. В таком случае его сумма $S(x)$ непрерывна в любой точке интервала сходимости.

Доказательство. Пусть $x\in(-R,R)$. Тогда можно найти такой интервал $(-r,r)$, $0<r<R$, что $x\in(-r,r)$. На любом отрезке $[-r,r]\subset$ $\subset(-R,R)$ ряд сходится равномерно и члены его непрерывны на этом отрезке. По теореме о непрерывности суммы функционального ряда, получим, что его сумма непрерывна на всем отрезке $[-r,r]$ и, следовательно, в точке x. ▲

10.3.4. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема 10.24. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ с радиусом сходимости $R \neq 0$. В таком случае его сумма $s(x)$ дифференцируема в любой точке интервала сходимости, причем

$$\frac{ds}{dx}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$

т. е. ряд можно почленно дифференцировать. Кроме того, для любой такой точки x имеет место равенство

$$\int_0^x s(\tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+1},$$

т. е. ряд можно почленно интегрировать. При этом радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+1}$ будут равны R.

Доказательство этой теоремы здесь не приводим. Отметим только, что оно опирается на теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов.

Следствие. Поскольку почленно продифференцированный ряд снова имеет радиус сходимости, равный R, то он также удовлетворяет условиям теоремы и его можно почленно продифференцировать еще раз. Отсюда следует, что сумма степенного ряда имеет производные любого порядка, а ряд можно дифференцировать почленно любое число раз.

10.3.5. Ряды Тейлора

Определение 10.12. Если функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные любого порядка, то для нее можно построить ряд

$$f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)+\ldots, \quad (10.36)$$

который называется *рядом Тейлора в точке* x_0 этой функции. Если $x_0 = 0$, то этот ряд носит название *ряда Маклорена.*

Для функции $y = f(x)$ справедлива при любом n и формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)+R_n,$$

где R_n — остаточный член формулы Тейлора, который можно представить в разных формах. Например, в форме Лагранжа

$$|A| = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} =$$

$$= a_{11} \sum_{(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)} +$$

$$+ a_{21} \sum_{(\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, 1, \alpha_3, \dots, \alpha_n)} +$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + $$

$$+ a_{n1} \sum_{(\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1})} a_{1\alpha_1} a_{3\alpha_3} \dots a_{(n-1)\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, 1)}.$$

Поясним это представление. Формула

$$\sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)},$$

по которой находят величину определителя, представляет собой сумму слагаемых, каждое из которых определяется перестановкой (α_1, α_2, ..., α_n), образованной из чисел 1, 2, ..., n. Число 1 в перестановке может находиться как на первом месте, так и на любом другом.

Первая группа слагаемых, отщепленная от всей суммы,

$$a_{11} \sum_{(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)}$$

— слагаемые, которые порождаются перестановками вида (1, α_2, α_3, ..., α_n), т.е. перестановками, у которых число 1 стоит на первой позиции. Поскольку $\alpha_1 = 1$ у всех членов определителя этой группы, число a_{11} оказывается общим множителем, и его можно вынести за знак суммы (или, как говорят, вынести за скобки).

Аналогично строится вторая группа слагаемых: это те слагаемые в общей сумме, которые порождаются перестановками вида (α_1, 1, α_3, ..., α_n), т.е. перестановками, у которых число 1 стоит на второй позиции. Ясно, что ни одно слагаемое этой части суммы не входит в первую группу, поскольку число 1 не может находиться одновременно и на первой, и на второй позициях в перестановке (α_1, α_2, ..., α_n) (напомним, что эта перестановка представляет собой поставленные в некотором порядке числа 1, 2, ..., n, и одно и то же число дважды присутствовать в ней не может). Таким образом, во второй группе слагаемых выполняется равенство $\alpha_2 = 1$. Поэтому все члены определителя этой группы содержат общий множитель a_{21}, который можно вынести за знак суммы. Последующие слагаемые группируются по такому же принципу: k-я группа слагаемых представляет собой объединение тех членов определителя, которые находятся перестановками с числом 1 на k-й позиции. Анало-

$$R_n = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

где $0 < \theta < 1$. Поэтому между значением функции $f(x)$, частичной суммой $s_{n+1}(x)$ ряда Тейлора и остаточным членом формулы Тейлора имеется связь:

$$f(x) = s_{n+1}(x) + R_n,$$

из которой видно, что если остаточный член формулы Тейлора стремится к нулю в некоторой окрестности точки x_0 при $n \to \infty$, то ряд Тейлора будет сходиться и его суммой будет $f(x)$. В этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки x_0.

Итак, если $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0), \ (0! = 1).$$

Очевидно, что верно и обратное утверждение: из разложимости функции в ряд Тейлора следует, что $R_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, стремление к нулю остаточного члена формулы Тейлора в некоторой окрестности точки x_0 является необходимым и достаточным условием разложимости функции в данной окрестности в ряд Тейлора.

Теорема 10.25 (теорема единственности). Если функция $y = f(x)$ является суммой степенного ряда в точке x_0, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

в некоторой окрестности точки x_0, то этот ряд является для нее рядом Тейлора, т.е.

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ n = 0, 1, \ldots .$$

Доказательство здесь не приводим.

Замечание. Сформулированная теорема имеет большое практическое значение: она утверждает, что найденное любым способом разложение функции в степенной ряд дает разложение функции в ряд Тейлора.

10.3.6. Разложение функции в степенной ряд

В различных вопросах математического анализа и его приложений возникает потребность в представлении функции в виде суммы степенного ряда, т.е. в разложении ее в ряд Тейлора. Но применять для этого определение не всегда удобно. В силу теоремы единственности можно использовать другие приемы, в частности уже найденные разложения других функций. Поясним сказанное на примере.

Пример 10.22. Пусть требуется разложить в ряд Маклорена функцию $y = \ln(1 - x)$. Замечаем, что

$$\frac{d}{dx}\ln(1-x) = \frac{(-1)}{(1-x)} = (-1)(1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots) = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Интегрируя это тождество от 0 до x, получим

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)}.$$

Здесь в правой части тождества проинтегрировали ряд почленно. То, что сумма бесконечно убывающей прогресии

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

равна $\dfrac{1}{1-x}$, нам известно из примера 10.2.

В приведенном примере ключевую роль играло так называемое *готовое разложение*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots .$$

Практика разложения функций в ряды Тейлора базируется на некотором запасе таких готовых разложений.

Приведем без вывода наиболее важные из них:

1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots,\ R = \infty;$

2) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ R = \infty;$

3) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\ R = \infty;$

4) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + \ldots,\ x \in (-1, 1];$

5) $(1 + x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$

$+\dfrac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,\ x \in (-1, 1],\ m > -1$. При m целом и положительном ряд превращается в конечную сумму (формула бинома Ньютона).

Пример 10.23. Покажем, как используются ряды Тейлора для приближенного интегрирования. Допустим, что требуется найти приближенно $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$. Этот интеграл не выражается через конечное число элементарных функций. Поэтому найти точное его значение не удастся. Применим разложение подынтегральной функции в ряд по степеням x. Имеем

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n};$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int\limits_0^1 x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}.$$

Пользуясь приближенным равенством

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)},$$

за счет выбора N можно добиться любой требуемой точности.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Пользуясь определением суммы ряда и его сходимости, выясните, сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

2. Используя теоремы сравнения, исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n^2 + 1}$.

3. С помощью признака Даламбера исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}$.

4. С помощью радикального признака Коши исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \frac{n}{3^n}$.

5. С помощью интегрального признака Коши выясните, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$.

6. Применив признак Лейбница, докажите сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$.

7. Найдите область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n\ 7^n}$.

8. Применяя почленное дифференцирование, найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^{n-1}$.

9. Разложите в ряд Тейлора по степеням x функцию $y = \sin 3x$.

10. Найти приближенную формулу для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$.

Г Л А В А 11

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

11.1. Введение

11.1.1. Основные понятия

Дифференциальные уравнения принадлежат классу функциональных уравнений, когда неизвестной является функция. Мы уже имели дело с функциональным уравнением $F(x, y) = 0$ при изучении неявных функций. Требовалось выяснить, когда она существует, и найти функцию $y = \varphi(x)$, которая при подстановке ее в уравнение обращает его в тождество, т.е. $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$. Это имеют в виду, когда говорят, что функция $y = \varphi(x)$ является решением функционального уравнения $F(x, y) = 0$.

Дифференциальные уравнения — более сложные объекты: под знаком функции F находятся не только x, y, но и производные неизвестной функции.

Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются уравнения, когда неизвестная функция зависит только от одного аргумента — x. Уравнения, неизвестными в которых являются функции нескольких переменных, называются *уравнениями с частными производными*. Здесь будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Общий вид такого уравнения можно представить в следующей форме:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (11.1)$$

Максимальный порядок входящих в уравнение производных называется *порядком* дифференциального уравнения. Таким образом, уравнение (11.1) является уравнением n-го порядка. Решить это уравнение — значит найти функцию $y = \varphi(x)$, которая при подстановке ее в уравнение обращает его в тождество на некотором интервале (a, b). Естественно эту функцию называть *решением* дифференциального уравнения (11.1).

Задача нахождения решения или всех решений для уравнения (11.1) является основной задачей, которой занимается теория дифференциальных уравнений. Эта теория содержит не только методы нахождения решений, но и методы анализа уравнений, позволяющие изучить вопрос о разрешимости задачи нахождения решений. Уже первые примеры дифференциальных уравнений показывают, что решений у дифференциальных уравнений бывает бесконечно много.

Пример 11.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение, имеющее следующий вид: $\cos x - y' = 0$. Его можно записать иначе: $y' = \cos x$. Теперь видно, что задача нахождения решения дифференциального уравнения в данном случае является задачей отыскания первообразной функции для $\cos x$, т. е. задачей интегрального исчисления. Множество всех первообразных — это неопределенный интеграл от $\cos x$, т. е.

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C,$$

где C — произвольная постоянная. Видим, что множество всех решений этого дифференциального уравнения является бесконечным. В данном случае ответ можно представить в виде простой формулы:

$$y = \sin x + C.$$

Как известно, решая дифференциальное уравнение

$$y' = f(x),$$

мы придем к необходимости вычислить интеграл

$$\int f(x) dx,$$

который, во-первых, не всегда выражается через конечное число элементарных функций, а во-вторых, когда такое выражение может быть получено, нахождение его в некоторых случаях может быть очень сложным.

Эти соображения показывают, что уже в простейшем случае, коим является дифференциальное уравнение $y' = f(x)$, нахождение явного выражения y через x может быть сложным и громоздким, а в некоторых случаях, например при $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, вообще невозможным.

Пример 11.1 заставляет задуматься над постановкой задачи, которая была дана выше: определить функцию $y = \varphi(x)$, обращающую дифференциальное уравнение в тождество, т. е. найти решение дифференциального уравнения. В такой постановке задача сможет быть доведена до ответа в очень небольшом наборе дифференциальных уравнений. Поэтому необходимо расширить класс уравнений, для которых можно найти решение. Первый шаг в этом направлении — считать, что дифференциальное уравнение решено, если решение, т. е. функция, представлено с помощью интеграла, возможно не выражающегося через элементарные функции. Второй шаг — допускать ответ в такой форме, когда решение задается неявно с помощью функционального уравнения, не содержащего производных, но, возможно, содержащего неберущиеся интегралы от известных функций. И наконец, допускать, чтобы решение уравнения было представлено в виде суммы функционального ряда. Если можно найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее первым двум правилам, то говорят, что уравнение *интегрируется в квадратурах.*

В некоторых случаях для нахождения всех решений уравнения нет необходимости вычислять интегралы. Тем не менее процесс нахождения решений называется *интегрированием* дифференциального уравнения.

11.1.2. Понятие общего и частного решений. Задача Коши

Дифференциальные уравнения, как правило, имеют бесконечное множество решений, которое может зависеть от произвольных постоянных. Так, в примере 11.1 множество всех решений дифференциального уравнения

$$\cos x - y' = 0$$

описывается формулой

$$y = \sin x + C,$$

содержащей одну произвольную постоянную C. Множество решений уравнения

$$y'' = 0$$

может быть получено двумя последовательными интегрированиями:

$$y' = C_1 \text{ и } y = C_1 x + C_2.$$

Как видим, это множество зависит от двух произвольных постоянных: C_1 и C_2. Количество произвольных постоянных в свою очередь зависит от порядка дифференциального уравнения. В случае дифференциального уравнения первого порядка произвольная постоянная — одна, для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = 0$$

— две. Обычно, как правило, так и бывает — количество произвольных постоянных в формуле, описывающей все решения уравнения n-го порядка, равно n, т.е. порядку этого дифференциального уравнения. Такую функцию

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n),$$

обладающую тем свойством, что, с одной стороны, при любых значениях C_1, C_2, ..., C_n (каждое из них может иметь свой интервал изменения: $p_i < C_i < q_i$, $i = 1, 2, ..., n$) из нее получается некоторое решение дифференциального уравнения, а с другой стороны, для любого, наперед заданного, решения уравнения $\tilde{y}(x)$ найдутся единственные значения констант C_1, C_2, ..., C_n такие, что при подстановке их в качестве аргументов в эту функцию будет получено решение $\tilde{y}(x)$, называют *общим решением* дифференциального уравнения. Бывает так, что эта функция оказывается заданной неявно уравнением

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0.$$

Такое представление общего решения называется *общим интегралом* дифференциального уравнения. Для дифференциальных уравнений первого порядка общее решение и общий интеграл имеют вид

$$y = \varphi(x, C) \text{ и } \Phi(x, y, C) = 0.$$

Иногда общий интеграл представляют в виде

$$\varphi(x, y) = C.$$

Если взять какое-то решение дифференциального уравнения $y = h(x)$, то оно может быть получено из формулы для общего решения путем придания константам C_1, C_2, ..., C_n каких-то конкретных частных значений.

Поэтому решение $y = h(x)$ называют *частным решением* дифференциального уравнения. Если же это решение получается из общего интеграла путем фиксирования значений произвольных постоянных как функция, заданная неявно уравнением

$$H(x, y) = 0,$$

то это уравнение называется *частным интегралом*.

Частное решение, как и частный интеграл, уже не зависит от произвольных постоянных, а зависит только от x.

Как будет видно из дальнейшего, только одно решение из бесконечного множества всех решений интересует исследователя, применяющего для моделирования изучаемого процесса дифференциальное уравнение: именно то, которое описывает этот процесс. Поэтому дополнительно к проблеме нахождения всех решений дифференциального уравнения возникает задача выделения этого решения из бесконечного множества всех решений. Это можно сделать только при наличии какого-то дополнительного условия, выделяющего искомое решение из множества всех решений. В зависимости от вида этих условий различают *задачу* для дифференциального уравнения: найти решение, удовлетворяющее заданным условиям. Как правило, эти условия таковы, что определяемое ими решение существует и единственно. Про такую задачу говорят, что она поставлена *корректно*.

Для уравнений первого порядка наиболее важной задачей является *задача Коши*. Она состоит в том, чтобы из всего множества решений дифференциального уравнения найти то, которое в данной точке $x = x_0$ принимает заданное значение $y = y_0$. При изучении с помощью дифференциальных уравнений процессов, изменяющихся с течением времени (например, движения материальной точки), роль независимой переменной играет время. Тогда, определив значения x_0 и y_0 можно узнать состояние системы в момент времени x_0, характеризуемое значением y_0 (известна координата, а значит, и положение точки).

Пришедшая из механики терминология укоренилась в теории дифференциальных уравнений, и значения x_0 и y_0 называют *начальными данными* задачи Коши, а условия $y = y_0$ при $x = x_0$ — *начальными условиями.*

Пример 11.2. Поставим задачу Коши для рассмотренного выше дифференциального уравнения $\cos x - y' = 0$: найти решение уравнения, удовлетворяющее условию $y = 1$ при $x = 0$. Для решения задачи Коши воспользуемся общим решением, которое имеет вид $y = \sin x + C$. Подставляя в левую часть формулы $y = 1$, а в правую $x = 0$, находим, что $C = 1$. Таким образом, решением задачи Коши будет частное решение $y = \sin x + 1$.

В случае, когда уравнение имеет порядок выше первого, равный n, в формулу общего решения входит n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, для однозначного определения которых требуется уже не одно, а n условий.

Задача Коши состоит в том, чтобы найти частное решение уравнения, удовлетворяющее условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Пример 11.3. Решим задачу Коши: для уравнения $y'' = 0$ найти частное решение, удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. Воспользуемся формулой для общего решения $y = C_1x + C_2$. Дифференцируя ее, найдем, что $y' = C_1$. Подставляя начальные условия в эти два соотношения, получим систему уравнений относительно костант C_1 и C_2: $1 = C_2$ и $3 = C_1$. Откуда получаем искомое решение $y = 3x + 1$.

11.1.3. Геометрический смысл уравнения и его решений

Если ввести на плоскости прямоугольные декартовы координаты x и у, то решению $y = \varphi(x)$ на этой плоскости будет соответствовать кривая: график этой функции. Такая кривая называется *интегральной кривой* данного дифференциального уравнения (название сохраняется и в том случае, когда решение задается неявно).

Если рассмотреть дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{11.2}$$

то интегральные кривые этого уравнения характеризуются тем, что тангенс угла наклона касательной (в этом состоит геометрический смысл $\frac{dy}{dx}$) равен в каждой точке области, в которой определена функция $f(x, y)$, ее значению в этой точке. Поскольку функция $f(x, y)$ задана, можно, не имея самой интегральной кривой, найти уравнение и построить касательную к ней в каждой точке области (x_0, y_0):

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Таким образом, в каждой точке области, где определена функция $f(x, y)$, можно провести прямую. Хотя эта прямая определяет направление на плоскости с точностью до знака, тем не менее говорят, что дифференциальное уравнение (11.2) определяет в области на плоскости *поле направлений.*

Если рассмотреть множество точек, в которых выполняется равенство $f(x, y) = k$, то эти точки образуют на плоскости, вообще говоря, некоторую кривую, во всех точках которой касательные к интегральным кривым будут иметь одинаковый тангенс угла наклона, равный k, а значит, и одинаковый угол наклона, т.е. будут все параллельны. По этой причине кривая, определяемая уравнением

$$f(x, y) = k,$$

называется *изоклиной* — линией равного наклона. Эти кривые находят применение при геометрическом приближенном построении множества интегральных кривых для уравнения (11.2).

Задачу Коши для уравнения (11.2) в геометрических терминах можно сформулировать так: среди всего множества интегральных кривых данного дифференциального уравнения найти такую, которая проходит через заданную точку с координатами (x_0, y_0).

11.1.4. Разрешимость задачи Коши

Пусть Π_X — множество точек (x, y) на плоскости, удовлетворяющих условию $x_0 \le x \le X$, $-\infty < y < +\infty$; это множество назовем *полосой*.

Теорема 11.1. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в полосе Π_X и удовлетворяет *условию Липшица*: существует постоянная L такая, что для любого $x \in [x_0, X]$ и любых y_1 и y_2 выполняется неравенство

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|. \tag{11.3}$$

Тогда для любого начального значения y_0 решение задачи Коши найти решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, существует и единственно на всем отрезке $[x_0, X]$.

Доказательство этой теоремы здесь не приводим.

Замечание. Если функция $f(x, y)$ имеет в полосе Π_X частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ такую, что существует постоянная L такая, что для любого $x \in [x_0, X]$ и любого y выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \le L,$$

то условие Липшица выполнено.

Пример 11.4. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x + y) .$$

Здесь $f(x, y) = \cos(x + y)$. Функция $f(x, y)$ имеет

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\sin(x + y) \text{ и } \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \le 1.$$

Следовательно, при любых x_0, y_0 и X задача Коши имеет единственное решение на отрезке $[x_0, X]$.

11.2. Уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах

11.2.1. Уравнения вида $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b). Тогда, как известно из курса интегрального исчисления, если x_0 и x принадлежат этому интервалу, то одним из решений рассматриваемого дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x)$ будет функция

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Все другие решения отличаются от него на постоянное слагаемое. Поэтому общим решением будет функция

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C.$$

гично тому, как это было в случае, когда $k = 1$ и 2, у всех слагаемых возникает общий множитель a_{k1}, который выносится за знак суммы.

Рассмотрим первую группу слагаемых:

$$a_{11} \sum_{(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)}.$$

Эта сумма напоминает выражение для определителя порядка $(n-1)$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

умноженного на a_{11}.

Действительно, все слагаемые с точностью до знака совпадают с членами этого определителя. Остается пока неясным вопрос, с правильным ли знаком входят в первую группу слагаемых

$$\sum_{(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)}$$

произведения $a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n}$. В определитель

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

эти слагаемые входят со знаком $(-1)^{S'}$, где S' — число инверсий в перестановке $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$. Но это число инверсий совпадает с числом инверсий в перестановке $(1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, так как число 1 никаких новых инверсий по сравнению с перестановкой $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ не образует. Поэтому для первой группы слагаемых $S' = S(1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ и, следовательно, знаки у всех слагаемых совпадают со знаками членов определителя M_{11}.Таким образом, для первой группы слагаемых оказывается справедливым равенство

$$a_{11} \sum_{(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} M_{11}.$$

Пример 11.5. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^x .$$

Имеем

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^t\,dt + C = \mathrm{e}^t\Big|_{x_0}^{x} + C = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x_0} + C = \mathrm{e}^x + C_1,$$

где $C_1 = C - \mathrm{e}^{x_0}$ будет произвольной константой, поскольку таковой является C.

11.2.2. Уравнения вида $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$

Это уравнение в том случае, когда $f(y)$ непрерывна и не обращается в нуль на интервале (a, b), можно переписать в форме (поменяв ролями x и y)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)},$$

что позволяет свести это уравнение к виду, рассмотренному выше (см. п. 11.2.1). Его общий интеграл будет иметь вид

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{f(t)} + C$$

[y_0 и y принадлежат интервалу (a, b)]. Если же в какой-либо одной точке y_1 этого интервала окажется, что $f(y_1) = 0$, то интервал (a, b) распадется на два интервала (a, y_1) и (y_1, b), на каждом из которых может быть найден общий интеграл и, кроме того, возникает еще одно решение $y \equiv y_1$.

Пример 11.6. Найти общий интеграл уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^y.$$

Переписываем уравнение в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\mathrm{e}^y}, \text{ или } \frac{dx}{dy} = \mathrm{e}^{-y}.$$

Откуда получаем

$$x = \int_{y_0}^{y} \mathrm{e}^{-t}dt + C = -\mathrm{e}^{-t}\Big|_{y_0}^{y} + C = -\mathrm{e}^{-y} + C + \mathrm{e}^{-y_0} = -\mathrm{e}^{-y} + C_1,$$

где $C_1 = C + \mathrm{e}^{-y_0}$ — произвольная константа.

11.2.3. Уравнения с разделенными переменными

Уравнение первого порядка вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

можно умножить на dx и записать в виде

$$dy - f(x, y)dx = 0,$$

или, как говорят, в дифференциальной форме.

В более общем случае уравнения представляются в следующем виде:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{11.4}$$

где переменные x и y входят симметрично (равноправно). Это обстоятельство приводит к тому, что представлению решения в виде $y = \varphi(x)$ не отдается предпочтения по сравнению с представлением либо $x = f(y)$, либо $F(x, y) = 0$. Интегрирование дифференциальных уравнений, т.е. процесс нахождения решений, не подразумевает обязательного представления решения в виде $y = \varphi(x)$, что соответствует тем правилам, которые были изложены выше. То же самое можно сказать относительно общего решения: уравнение считается решенным, если найден его общий интеграл.

Уравнением *с разделенными переменными* называется уравнение вида:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0, \tag{11.5}$$

где коэффициент f зависит только от x, а g — только от y, т.е. переменные разделены.

Очевидно, что это уравнение является частным случаем уравнения (11.4). Будем считать, что функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны на интервалах (a, b) и (c, d) соответственно. Его можно переписать в следующем виде:

$$d\left[\int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{y_0}^{y} g(s)ds\right] = 0, \tag{11.6}$$

т.е. как дифференциал от функции двух переменных: x и y. Здесь x_0 и x принадлежат интервалу (a, b), а y_0 и y — интервалу (c, d). Таким образом, функция, стоящая под знаком дифференциала, определена и дифференцируема внутри прямоугольника $a < x < b$, $c < y < d$. Функция, имеющая первый дифференциал, тождественно равный нулю в прямоугольнике, является в этом прямоугольнике константой. Поэтому тождество (11.6) эквивалентно тождеству

$$\left[\int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{y_0}^{y} g(s)ds\right] = C. \tag{11.7}$$

Поскольку оно не содержит производных, то представляет собой общий интеграл уравнения (11.5). Его можно записать в виде $F(x, y) = C$. Произвольность постоянной C ограничивается интервалом изменения функции $F(x, y)$.

Пример 11.7. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$2xdx + 2ydy = 0.$$

Применяя формулу (11.7), получаем

$$x^2 + y^2 = C.$$

Это общий интеграл уравнения. Семейство интегральных кривых представляет собой семейство окружностей с центром в начале координат. Произвольная постоянная C может принимать только положительные значения: $C > 0$.

11.2.4. Уравнения с разделяющимися переменными

К уравнениям с разделенными переменными легко сводятся уравнения вида

$$E(x)F(y)dx + G(x)H(y)dy = 0, \tag{11.8}$$

называемые уравнениями *с разделяющимися переменными*. Достаточно умножить уравнение на функцию $\dfrac{1}{F(y)G(x)}$ и оно приобретает вид (11.5):

$$\frac{E(x)}{G(x)}dx + \frac{H(y)}{F(y)}dy = 0. \tag{11.9}$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид $S(x, y) = C$, где

$$S(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{E(x)}{G(x)}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{H(y)}{F(y)}dy.$$

Однако при умножении уравнения (11.8) на множитель (11.9) возможна потеря некоторых решений. Если y_1 таково, что $F(y_1) = 0$, то у уравнения (11.8) существует решение $y \equiv y_1$, которого нет у уравнения (11.9). Кроме того, у уравнения, записанного в дифференциальной форме, возможны решения вида $x = x_1$. И такое решение будет, в отличие от уравнения (11.9), если $G(x_1) = 0$. В итоге имеем, что эти дополнительные решения должны быть присоединены к тем решениям, которые определяются выражением $S(x, y) = C$.

Пример 11.8. Пусть требуется решить дифференциальное уравнение

$$3x^2(1 + y^3)dx - 3y^2(1 + x^3)dy = 0.$$

Без труда распознаем в нем уравнение с разделяющимися переменными и производим их разделение. Получим

$$\frac{3x^2dx}{1+x^3}-\frac{3y^2dy}{1+y^3}=0\,.$$

В качестве точки (x_0, y_0) берем точку $(0, 0)$. Интегрируя, получим

$$\ln|1+x^3|-\ln|1+y^3|=\ln C.$$

Потенцируя, получим

$$(1+x^3)=(1+y^3)C.$$

Здесь константа была записана в виде $\ln C$ для удобства записи окончательного результата; при потенцировании модули опущены за счет того, что постоянной C, которая стояла под знаком логарифма и была обязана быть положительной, теперь разрешается принимать любые значения. При этом решение $x=-1$ получается при $C=0$, а решение $y=-1$ не получается ни при каком значении C. Поэтому его следует учитывать дополнительно.

11.2.5. Однородные уравнения

Многие дифференциальные уравнения, не являясь уравнениями с разделяющимися переменными, приводятся к ним с помощью замены переменных. К таким уравнениям относятся *однородные уравнения*, общий вид которых

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{11.10}$$

При решении таких уравнений делается замена переменной y по формуле $y=u(x)x$, где u — новая переменная. Тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u,\ \text{а}\ \frac{y}{x}=u.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (11.10), получим

$$\frac{du}{dx}x+u=f(u),$$

т. е. уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получаем

$$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}. \tag{11.11}$$

Интегрирование дает

$$\Phi(u)-\ln|x|=C,$$

где $\Phi(u)$ — одна из первообразных функций функции $\dfrac{1}{f(u)-u}$. Заменяя $u=\dfrac{y}{x}$, получаем

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right) - \ln|x| = C.$$

Множество решений, даваемых этой формулой, должно быть дополнено решениями вида $u = u_0$, если $f(u_0) - u_0 = 0$, или $y = u_0 x$.

Пример 11.9. Найдем все решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Это уравнение после деления в правой части числителя и знаменателя на x^2 принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\dfrac{y}{x}}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}.$$

Положив $\dfrac{y}{x} = u$, получим

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx}x = \frac{2u}{1+u^2} - u = \frac{u-u^3}{1+u^2}.$$

Далее

$$\int_{u_0}^{u} \frac{(1+t^2)dt}{(t-t^3)} = \int_{u_0}^{u} \frac{dt}{t} - \int_{u_0}^{u} \frac{2tdt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{u}{u^2-1}\right|,$$

если в качестве u_0 взять $u_0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, для u общий интеграл имеет вид

$$\ln\left|\frac{u}{u^2-1}\right| - \ln|x| = \ln C.$$

Заменив $u = \dfrac{y}{x}$, получаем

$$y = (y^2 - x^2)C.$$

Опускание модулей компенсируется, как и выше, разрешением для C принимать любые значения, отличные от нуля. Рассмотрим теперь вопрос о дополнительных решениях, связанных с решениями уравнения $f(u) - u = 0$. В нашем случае имеем

$$\frac{2u}{1+u^2} - 2 = 0, \text{ или } \frac{u-u^3}{1+u^2} = 0.$$

Решение уравнения $u_0 = 0$ дает решение $y \equiv 0$. Это решение будет содержаться в формуле $y = (y^2 - x^2)C$, если C разрешить принимать значение $C = 0$. Два других решения $u_1 = -1$ и $u_2 = 1$ порождают дополнительные решения $y = -x$ и $y = x$.

11.2.6. Линейные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x), \tag{11.12}$$

где функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на интервале (a, b). Если $q(x) \equiv 0$ на интервале (a, b), то уравнение называется *линейным однородным* и имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y, \tag{11.13}$$

являясь уравнением с разделяющимися переменными. Его общее решение может быть представлено в виде

$$y = C\mathrm{e}^{P(x)},$$

где $P(x)$ — первообразная функция по отношению к $p(x)$ на интервале (a, b), т.е.

$$P(x) = \int P dx.$$

Если $q(x)$ не является функцией, тождественно равной нулю на (a, b), то уравнение (11.12) называется линейным *неоднородным* уравнением, а уравнение (11.13) — линейным однородным, соответствующим уравнению (11.12). Общее решение неоднородного уравнения обычно находят с помощью приема, называемого *вариацией постоянной*. (Можно встретить такой термин «*метод вариации постоянной*».) В чем заключается этот метод? Общее решение неоднородного уравнения ищут в виде $y = C(x)\mathrm{e}^{P(x)}$, т.е. в той форме, которую имеет общее решение соответствующего однородного уравнения, но с той разницей, что здесь $C = C(x)$ и является неизвестной функцией. Замена произвольной постоянной C в выражении для общего решения однородного уравнения $y = C\mathrm{e}^{P(x)}$ на функцию $C(x)$ и объясняет название метода. Для того чтобы найти $C(x)$, надо подставить выражение $y = C(x)\mathrm{e}^{P(x)}$ в неоднородное уравнение (11.12). Получим

$$\frac{dC}{dx}\mathrm{e}^{P(x)} + C(x)\mathrm{e}^{P(x)}\frac{dP(x)}{dx} = p(x)C(x)\mathrm{e}^{P(x)} + q(x). \tag{11.14}$$

Поскольку $P(x)$ — первообразная для $p(x)$, то $\dfrac{dP(x)}{dx} = p(x)$, и уравнение упрощается:

$$\frac{dC}{dx}\mathrm{e}^{P(x)} = q(x), \quad \text{или} \quad \frac{dC}{dx} = q(x)\mathrm{e}^{-P(x)}.$$

Если $H(x)$ — первообразная по отношению к функции $q(x)\mathrm{e}^{-P(x)}$, то $C(x) = H(x) + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Таким образом, общее решение неоднородного линейного уравнения имеет вид

$$y(x) = (H(x) + C_1)\,\mathrm{e}^{P(x)},$$

где $P(x)$ — первообразная по отношению к $p(x)$; $H(x)$ — первообразная по отношению к функции $q(x)\,\mathrm{e}^{-P(x)}$.

Пример 11.10. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -2xy + x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Здесь $p(x) = -2x$. В качестве $P(x)$ возьмем $P(x) = -x^2$. Тогда

$$q(x)\,\mathrm{e}^{-P(x)} = x \text{ и } H(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = \left(C_1 + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{x^2}.$$

11.2.7. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^{\alpha}, \tag{11.15}$$

где α — произвольное число, не равное 0 и 1. Это уравнение сводится к линейному уравнению с помощью замены $z = y^{1-\alpha}$. Действительно, делением уравнения (11.15) на y^{α} приводим его к виду:

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x). \tag{11.16}$$

Теперь замечаем, что левая часть уравнения в точности равна $\frac{1}{1-\alpha}\frac{dz}{dx}$. После умножения уравнения на $(1 - \alpha)$ получаем линейное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x), \tag{11.17}$$

которое может быть решено по схеме, приведенной в п. 11.2.6.

Замечание. Если $\alpha > 0$, то при делении уравнения на y^{α} происходит потеря решения $y \equiv 0$, которое следует также учесть.

Пример 11.11. Решим уравнение Бернулли:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy + 2x^3y^3.$$

Здесь $\alpha = 3$. Делаем замену $z = \dfrac{1}{y^2}$. Уравнение после умножения на $\left(\dfrac{-2}{y^3}\right)$ и замены переменного примет вид

$$\frac{dz}{dx} = 4xz - 4x^3.$$

Решаем его с помощью вариации постоянной: $p(x) = 4x$, откуда $P(x) = 2x^2$; $q(x)e^{-P(x)} = -4x^3e^{-2x^2}$.

$$H(x) = \frac{1+2x^2}{2}e^{-2x^2},$$

откуда

$$z = \left[C_1 + \frac{1+2x^2}{2}e^{-2x^2}\right]e^{2x^2}.$$

Заменяя z на $\dfrac{1}{y^2}$ после несложных преобразований, придем к формуле

$$\frac{1}{y^2} = C_1e^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2},$$

охватывающей все решения уравнения, кроме одного: $y \equiv 0$, которое следует также учесть, так как $\alpha = 3 > 0$.

11.2.8. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнением в полных дифференциалах называется дифференциальное уравнение первого порядка следующего вида:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{11.18}$$

если его левая часть представляет собой полный дифференциал функции двух переменных. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют непрерывные частные производные, то для того, чтобы уравнение (11.18) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{11.19}$$

Это условие легко проверяется, и если оно выполнено, то существует функция $U(x, y)$ такая, что $dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Следовательно, уравнение имеет вид $dU(x, y) = 0$, и его общий интеграл будет

$$U(x, y) = C,$$

где C — произвольная постоянная. Остается невыясненным вопрос, как найти функцию $U(x, y)$? Это можно сделать несколькими способами. Один из них приводит к следующей формуле:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,s)\,ds,$$

где произвольная точка (x_0, y_0) принадлежит области, в которой выполняются указанные выше условия для функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Доказательство здесь не приводим. Итак, общий интеграл уравнения (11.18) при выполнении условия (11.19) имеет следующий вид:

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,s)\,ds = C, \qquad (11.20)$$

где C — произвольная константа.

Пример 11.12. Рассмотрим уравнение

$$(2x + 3y)dx + (3x + 3y^2)dy = 0.$$

Здесь

$$P(x, y) = (2x + 3y),\ Q(x, y) = (3x + 3y^2).$$

Проверим выполнение условия (11.19). Имеем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 3,$$

т. е. условие 11.19 выполняется. Находим функцию

$$U(x, y) = \int_0^x 2t\,dt + \int_0^y (3x + 3s^2)\,ds = x^2 + 3xy + y^3$$

[в качестве точки (x_0, y_0) взяли точку $(0, 0)$]. Общий интеграл имеет вид

$$x^2 + 3xy + y^3 = C.$$

Замечания. 1) Естественно, что, зная частные производные, можно восстановить функцию $U(x, y)$ только с точностью до постоянного слагаемого. Внешне выражения для общего интеграла могут быть разными, но множество решений при этом не изменится.

2) Произвольность постоянной C, стоящей в правой части общего интеграла, ограничивается интервалом изменения значений функции $U(x, y)$. Например, если общий интеграл имеет вид

$$\cos(x^2 + y^2) = C,$$

то C может принимать любые значения только из отрезка $[-1, 1]$, поскольку

$$|\cos(x^2 + y^2)| \le 1.$$

11.3. Уравнения высших порядков, их общие решения

11.3.1. Уравнения вида $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$

Уравнения вида $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ легко интегрируются в квадратурах. Последовательными интеграциями получим:

$$\frac{d^{n-1}y}{d\ x^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C_1;$$

$$\frac{d^{n-2}y}{d\ x^{n-2}} = \int_{x_0}^{x} \left[\int_{x_0}^{t} f(s)ds \right] dt + C_1(x - x_0) + C_2;$$

$$\frac{d^{n-3}y}{d\ x^{n-3}} = \int_{x_0}^{x} \left\{ \int_{x_0}^{t} \left[\int_{x_0}^{s} f(h)dh \right] ds \right\} dt + \frac{1}{2} C_1 (x - x_0)^2 + C_2(x - x_0) + C_3; \ldots$$

и наконец,

$$y = \int_{x_0}^{x} \left\{ \int_{x_0}^{t} \left[\int_{x_0}^{s} \cdots \int_{x_0}^{h} f(g)dg \cdots \right] ds \right\} dt \ +$$

$$+ \frac{C_1(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}(x - x_0) + C_n,$$

где интегрирование произведено n раз. Точка x_0 выбирается произвольно из интервала, на котором рассматривается данное уравнение. Эта формула дает общее решение. Проиллюстрируем ее применение на примере.

Пример 11.13. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \cos x.$$

Имеем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x + C_1$$

(в качестве точки x_0 взяли точку $x = 0$). Далее

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + C_1 x + C_2$$

и наконец,

$$y = -\sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Это и есть общее решение рассматриваемого уравнения.

При аналогичном анализе второй группы слагаемых

$$a_{21} \sum_{(\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)}$$

выясняется, что перестановки $(\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ и $(\alpha_1, 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ имеют разную четность (если одна из них четна, то другая — нечетна). Действительно, по сравнению с перестановкой $(\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ перестановка $(\alpha_1, 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ имеет на одну инверсию больше: пара α_1, 1 образует дополнительную инверсию. Следовательно, сумма

$$\sum_{(\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)}$$

и определитель

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

отличаются между собой знаком. Поэтому для второй группы слагаемых будет выполняться равенство

$$a_{21} \sum_{(\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)} =$$

$$= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = -a_{21} M_{21}.$$

При рассмотрении третьей группы слагаемых обнаруживается, что перестановки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_n)$ и $(\alpha_1, \alpha_2, 1, \alpha_4, \ldots, \alpha_n)$ отличаются на две инверсии: пары α_1, 1 и α_2, 1 образуют две дополнительные инверсии по сравнению с первой перестановкой. Поэтому для третьей группы слагаемых имеем

$$a_{31} \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{4\alpha_4} \ldots a_{n\alpha_n} (-1)^{S(\alpha_1, \alpha_2, 1, \alpha_4, \ldots, \alpha_n)} =$$

$$= a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{42} & a_{43} & \ldots & a_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{31} M_{31}.$$

11.3.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальные уравнения, порядок которых выше, чем единица, носят название уравнений высших порядков. Построить общее решение или, как говорят, проинтегрировать такое уравнение — задача, по сравнению с уравнениями первого порядка, гораздо более сложная. Поэтому те случаи, когда это можно сделать, представляют особый интерес. Бывает так, что уравнение проинтегрировать не удается, но можно понизить его порядок. Это, как правило, существенно помогает и исследовать уравнение, и, если требуется, найти решение численно, т.е. вычислить значения решения в некотором наборе точек, получив решение в виде таблицы. Поэтому уравнения, порядок которых может быть понижен за счет соответствующей замены переменных, представляют собой важный класс уравнений высших порядков. Уравнение вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x),$$

очевидно, принадлежит этому классу. Для него удается представить общее решение в квадратурах.

Рассмотрим еще несколько случаев, когда возможно понижение порядка дифференциального уравнения.

1. Уравнения, имеющие вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0,$$

классифицируются как уравнения, не содержащие явно искомой функции $y(x)$ и ее младших производных до порядка $(k-1)$ включительно. Их порядок может быть понижен на k единиц. Для этого вводится в рассмотрение новая неизвестная функция

$$z(x) = y^{(k)}(x).$$

Тогда $z' = y^{(k+1)}$, $z'' = y^{(k+2)}$, ..., $z^{(n-k)} = y^{(n)}$. И заменяя $y^{(k)}$, $y^{(k+1)}$, ..., $y^{(n)}$ соответственно на z, z', z'', ..., $z^{(n-k)}$, получим относительно функции $z(x)$ дифференциальное уравнение порядка $(n-k)$:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Если для него удастся найти общее решение

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}),$$

то общее решение исходного уравнения может быть найдено как общее решение уравнения типа, рассмотренного в п. 11.3.1:

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}),$$

т.е. последовательными интеграциями.

Пример 11.14. Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$y''' = (y'')^3.$$

Порядок этого уравнения может быть понижен на две единицы заменой $z = y''$. Тогда

$$y''' = z'.$$

Относительно z уравнение примет вид

$$z' = z^3.$$

Уравнения такого типа были рассмотрены в п. 11.2.2. Его общий интеграл представляется в виде

$$x = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{dt}{t^3} + C,$$

где z_0 можно взять равным 1. Тогда имеем

$$x = -\frac{1}{2t^2}\bigg|_1^z + C = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) + C.$$

Обозначив $2C + 1 = C_1$ и умножив все соотношение на 2, найдем общее решение для функции z:

$$z = (C_1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Теперь для искомой функции $y(x)$ получаем уравнение

$$y'' = (C_1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Последовательными интеграциями находим:

$$y' = -(C_1 - 2x)^{\frac{1}{2}} + C_2 \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + C_2 x + C_3.$$

Эта формула должна быть дополнена (см. п. 11.2.2) решениями, которые получаются при $z \equiv 0$, или $y'' \equiv 0$. Интегрирование этого уравнения дает

$$y = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2.$$

Итак, все решения данного уравнения найдены.

2. Рассмотрим дифференциальные уравнения, имеющие следующий вид:

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка классифицируется как уравнение, не содержащее независимого переменного, т.е. x. Порядок такого уравнения может быть понижен на одну единицу. Это делается путем введения новой неизвестной функции $q = q(y)$ такой, что $q = y'$. Тогда

$$y'' = \frac{dq}{dy}\frac{dy}{dx} = q'q.$$

Поэтому уравнение принимает вид

$$F(y, q, q'q) = 0,$$

т. е. превращается в дифференциальное уравнение первого порядка. Если удастся найти его общее решение

$$q = \varphi(y, C_1),$$

то для искомого решения исходного уравнения получится уравнение

$$y' = \varphi(y, C_1),$$

которое рассмотрено в п. 11.2.2. Его общий интеграл дается формулой

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{\varphi(t, C_1)} + C_2,$$

с учетом решений, которые могут получаться из уравнения

$$\varphi(y, C_1) = 0$$

(см. п. 11.2.2).

Пример 11.15. Рассмотрим уравнение

$$yy'' + (y')^2 = 1.$$

Оно не содержит переменного x. Сделаем замену $y' = q\,(y)$. Уравнение примет вид

$$yq'q + (q)^2 = 1.$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, его общий интеграл имеет вид

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{t} = \int_{q_0}^{q} \frac{sds}{1 - s^2} + C_1,$$

или

$$\ln(y^2) + \ln|1 - q^2| = \ln C_1.$$

Потенцируя и разрешая соотношение относительно q, получим

$$q = \pm\frac{\sqrt{y^2 - C_1}}{y}.$$

Заменяя q на y' и интегрируя получающееся дифференциальное уравнение, получим

$$\pm\sqrt{y^2 - C_1} = x + C_2\,.$$

Возведя в квадрат, преобразуем ответ к виду

$$(x + C_2)^2 - y^2 = C_1.$$

Дополнительных решений здесь нет, поскольку $y = y_0$ не удовлетворяет исходному уравнению.

В заключение обсудим методику решения задачи Коши для уравнений высшего порядка, допускающих понижение порядка. Нахождение решения, удовлетворяющего начальным условиям, в рассматриваемом случае целесообразно осуществлять не исходя из формулы для общего решения, что приводит, порой, к непреодолимым трудностям, а последовательно находя значения произвольных постоянных C_1, C_2, ... по мере их появления в процессе последовательных интеграций. Проиллюстрируем эту идею на примере.

Пример 11.16. Решить задачу Коши: найти решение уравнения

$$2y'' = 3y^2,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$.

Решение. Делая замену $y' = q(y)$, приводим уравнение к виду

$$2qq' = 3y^2.$$

Интегрируя, получим

$$q^2 = y^3 + C_1$$

или

$$(y')^2 = y^3 + C_1.$$

При $x = -2$, как следует из начальных условий, $y = 1$, а $y' = -1$. Подставляя эти значения в полученное уравнение, имеем

$$1 = 1 + C_1,$$

откуда следует, что

$$C_1 = 0 \text{ и } y' = \pm y^{\frac{3}{2}}.$$

При $x = -2$ это равенство также должно иметь место. Поскольку

$$y' = -1, \text{ а } y = 1, \text{ то } y' = -y^{\frac{3}{2}}.$$

Теперь интегрируем это уравнение. Имеем

$$-\int_1^y t^{-\frac{3}{2}} dt = \int_{-2}^x ds + C_2,$$

или

$$-2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = (x + 2) + C_2.$$

Полагая здесь $x = -2$ и учитывая, что при этом $y = 1$, найдем, что $C_2 = 0$. Теперь, выражая y через x, получим

$$y = \frac{4}{(x+4)^2}.$$

Это и есть искомое решение задачи Коши.

11.4. Уравнения высших порядков. Задача Коши

11.4.1. Постановка задачи Коши

Среди уравнений высших порядков выделим такие, которые можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^n y}{d\,x^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \qquad (11.21)$$

т. е. в разрешенном относительно старшей производной. Напомним, что задачей Коши для уравнения (11.21) называется задача нахождения частного решения этого уравнения $y(x)$, удовлетворяющего условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

где x_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1} — заданные числа.

Вопрос о разрешимости задачи Коши на отрезке $[x_0, X]$ решается в терминах, аналогичных случаю уравнений первого порядка.

11.4.2. Разрешимость задачи Коши

Пусть

$$\overline{z} = (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)$$

— упорядоченный набор действительных чисел. Обозначим через

$$\|\overline{z}\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots + z_n^2}\ .$$

Множество точек в $(n+1)$-мерном пространстве

$$(x, \overline{z}) = (x, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n),$$

для которых $x \in [x_0, X]$, а z_1, z_2, z_3, ..., z_n принимают любые значения, называется *слоем* и обозначается как Π_X. Функцию, стоящую в правой части уравнения (11.21), будем рассматривать как функцию $(n+1)$ переменных: $f(x, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)$.

Теорема 11.2. Пусть функция $f(x, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)$ определена и непрерывна в слое Π_X и пусть она удовлетворяет *условию Липшица* в следующей форме: существует положительная константа L такая, что для любых $x \in [x_0, X]$, и произвольных $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ и $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ выполняется

$$|f(x, u_1, u_2, u_3, ..., u_n) - f(x, v_1, v_2, v_3, ..., v_n)| \leq L\, \|\bar{u} - \bar{v}\|,$$

где $\bar{u} - \bar{v} = (u_1 - v_1,\ u_2 - v_2,\ u_3 - v_3,\ ...,\ u_n - v_n)$.

Тогда для любого набора начальных значений: $y_0,\ y_1,\ ...,\ y_{n-1}$ существует и притом единственное решение задачи Коши для уравнения (11.21) на отрезке $[x_0, X]$.

Следствие. Если уравнение (11.21) имеет вид

$$\frac{d^n y}{d\ x^n} = a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y + f(x), \quad (11.22)$$

где $a_1(x),\ a_2(x),\ ...,\ a_n(x),\ f(x)$ — функции, непрерывные на (a, b), то при любом $x_0 \in (a, b)$ и любых начальных данных решение задачи Коши существует и единственно на всем интервале (a, b).

Доказательства теоремы о разрешимости задачи Коши и ее следствия здесь не приводим.

11.5. Линейные уравнения высших порядков

11.5.1. Основные понятия

Линейным уравнением порядка n называется уравнение следующего вида:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = f(x), \quad (11.23)$$

где $a_0(x),\ a_1(x),\ a_2(x),\ ...,\ a_n(x),\ f(x)$ — функции, непрерывные на некотором интервале (a, b) [этот интервал может быть $(-\infty, +\infty)$], причем на этом интервале функция $a_0(x) \neq 0$ ни в какой точке.

Как вытекает из следствия из теоремы о разрешимости задачи Коши, уравнение (11.23) при любых начальных данных имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям. Чтобы описать структуру формулы, дающей общее решение такого уравнения, необходимо ввести некоторые понятия.

Определение 11.1. Уравнение (11.23) при условии, что $f(x) \equiv 0$ на (a, b), называется *линейным однородным уравнением n-го порядка*.

Определение 11.2. Соответствие $\mathbf{L}$, когда по заданной функции $h(x)$ однозначно находится другая функция $g(x)$, называется *оператором* $\mathbf{L}$. При этом используется запись

$$\mathbf{L}[h(x)] = g(x).$$

Пример 11.17. Пусть оператор $\mathbf{L}$ ставит в соответствие каждой функции $h(x)$ ее производную

$$\mathbf{L}[h(x)] = h'(x).$$

Такой оператор называется оператором дифференцирования, его обозначают через $\frac{d}{dx}$. Это удобно, поскольку запись

$$\mathbf{L}[h(x)] = \frac{d}{dx}h(x) = h'(x)$$

хорошо согласуется с обозначением производной $\frac{dh}{dx} = h'$.

Определение 11.3. Оператор $\mathbf{L}$ называется *линейным оператором*, если он удовлетворяет двум условиям:

а) для любой функции $h(x)$ любого числа λ справедливо равенство

$$\mathbf{L}[\lambda h(x)] = \lambda \mathbf{L}[h(x)];$$

б) для любых двух функций $h(x)$ и $g(x)$ справедливо равенство

$$\mathbf{L}[h(x) + g(x)] = \mathbf{L}[h(x)] + \mathbf{L}[g(x)].$$

Пример 11.18. Опереатор дифференцирования

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dx},$$

очевидно, является линейным оператором, поскольку константу всегда можно выносить за знак дифференцирования:

$$\left(\frac{d}{dx}(\lambda h(x))\right) = \lambda \frac{d}{dx}(h(x)),$$

а производная суммы равна сумме производных

$$\frac{d}{dx}(h(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(h(x)) + \frac{d}{dx}(g(x)).$$

Пример 11.19. Более сложным примером линейного оператора является оператор вида

$$\mathbf{L}[h(x)] = a_0(x)h^{(n)} + a_1(x)h^{(n-1)} + a_2(x)h^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)h,$$

называемый линейным дифференциальным оператором порядка n. Здесь функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ подчинены тем же условиям, что и в уравнении (11.23). Как и в примере 11.18, легко устанавливается, что оператор $\mathbf{L}$ является линейным оператором, если учесть, что

$$(h + g)^{(k)} = h^{(k)} + g^{(k)} \text{ и } (\lambda h(x))^{(k)} = \lambda(h(x))^{(k)}$$

при любом натуральном k.

Замечание. Используя линейный оператор, рассмотренный в примере 11.19, дифференциальное уравнение (11.23) можно записать в *операторной форме*:

$$\mathbf{L}[y(x)] = f(x). \tag{11.24}$$

Определение 11.4. Система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ..., $\varphi_m(x)$, определенных на интервале (a, b), называется *линейно зависимой* на этом интервале, если и только если существуют числа λ_1, λ_2, λ_3, ..., λ_m, не все равные нулю, и такие, что

$$\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \lambda_3\varphi_3(x) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x) \equiv 0$$

на интервале (a, b).

Замечание. Поскольку определение линейной зависимости системы функций совершенно аналогично определению линейной зависимости системы строк или системы столбцов матрицы, то это приводит к тому, что критерий линейной зависимости системы строк: система строк линейно зависима тогда и только тогда, когда найдется строка, которая линейно выражается через остальные, оказывается справедливым и для системы функций: система функций линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы одна из функций системы линейно выражается через остальные функции, т.е. при некотором j

$$\varphi_j(x) \equiv \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \alpha_k \varphi_k(x),$$

где α_k — некоторые числа.

11.5.2. Линейные однородные уравнения

Линейное однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = 0, \quad (11.25)$$

где $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ — функции, непрерывные на некотором интервале (a, b), причем $a_0(x) \neq 0$ ни в одной точке этого интервала. С помощью линейного оператора $\mathbf{L}$, определенного формулой

$$\mathbf{L}[y(x)] = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y,$$

уравнение (11.25) можно записать как

$$\mathbf{L}[y] = 0.$$

Пользуясь линейностью оператора $\mathbf{L}$, легко доказать следующие свойства решений уравнения (11.25).

Теорема 11.3. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — два решения уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$. Тогда:

а) функция $w(x) = u(x) + v(x)$ также будет решением этого уравнения;

б) для любого действительного числа λ функция $z(x) = \lambda u(x)$ будет решением уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$.

Доказательство. Поскольку $u(x)$ и $v(x)$ — решения уравнения, то $\mathbf{L}[u] = 0$ и $\mathbf{L}[v] = 0$. Для функции $w(x) = u(x) + v(x)$ имеем

$$\mathbf{L}[w] = \mathbf{L}[u + v] = \mathbf{L}[u] + \mathbf{L}[v] = 0 + 0 = 0,$$

т.е. $w(x)$ является решением.

Для функции $z(x) = \lambda u(x)$ имеем

$$\mathbf{L}[z] = \mathbf{L}[\lambda u] = \lambda\mathbf{L}[u] = \lambda \cdot 0 = 0,$$

т.е. $z(x)$ является решением. ▲

Следствие. Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, ..., $y_m(x)$ являются решениями уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$, то будет решением этого уравнения любая линейная комбинация этих решений, т.е. функция

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k(x),$$

где α_k — некоторые числа.

Определение 11.5. Любая линейно независимая система из n решений линейного однородного уравнения (11.25) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Теорема 11.4. Для любого линейного однородного уравнения (11.25) существует фундаментальная система решений.

Доказательство. Поставим для уравнения (11.25) n задач Коши:

$$\begin{aligned}
&1)\ y(x_0) = 1,\ y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) = 0, ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = 0;\\
&2)\ y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 1,\ y''(x_0) = 0, ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = 0;\\
&3)\ y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) = 1, ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&n)\ y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) = 0, ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = 1.
\end{aligned} \tag{11.26}$$

Все эти задачи однозначно разрешимы по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши. Пусть это будут функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$. Если бы они образовывали линейно зависимую систему, то существовали бы постоянные λ_1, λ_2, λ_3, ..., λ_n, не все равные нулю, и такие, что

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + ... + \lambda_n y_n(x) \equiv 0$$

на интервале (a, b). Дифференцируя это тождество $(n - 1)$ раз, получим вместе с исходным систему тождеств на интервале (a, b):

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + ... + \lambda_n y_n(x) \equiv 0;\\
&\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) + ... + \lambda_n y_n'(x) \equiv 0;\\
&\lambda_1 y_1''(x) + \lambda_2 y_2''(x) + ... + \lambda_n y_n''(x) \equiv 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x) + ... + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) \equiv 0,
\end{aligned}$$

которая обязана выполняться и в точке $x = x_0$. Подставляя это значение в первое тождество и учитывая равенства (11.26), получим

$\lambda_1 = 0$. Аналогично из второго тождества имеем, что $\lambda_2 = 0$, и т. д. Из последнего тождества вытекает, что $\lambda_n = 0$. Полученное противоречие заставляет признать линейную независимость системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$. Следовательно, эти решения образуют фундаментальную систему решений. ▲

Следующая теорема приближает нас к формуле для общего решения уравнения (11.25).

Теорема 11.5. Любые $(n+1)$ решений уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$ образуют линейно зависимую систему.

Доказательство. Пусть функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_{n+1}(x)$ являются решениями уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$. Составим определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_{n+1} \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_{n+1}' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_{n+1}'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & y_3^{(n)} & \dots & y_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{11.27}$$

Из уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$ или

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

следует, что $y^{(n)}$ может быть представлена как линейная комбинация функций $y^{(n-1)}(x)$, $y^{(n-2)}(x)$, ..., $y'(x)$, $y(x)$. Действительно, поскольку $a_0(x) \neq 0$, то

$$y^{(n)}(x) = -\frac{1}{a_0(x)}(a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y),$$

и, следовательно, при каждом фиксированном x последняя строка определителя линейно выражается через остальные его строки. Как известно из теории определителей, в этом случае определитель равен нулю. Следовательно, рассматриваемый определитель равен нулю при любом $x \in (a, b)$. Теперь попробуем из функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_{n+1}(x)$ построить как линейную комбинацию такое решение уравнения

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) + \dots + C_{n+1} y_{n+1}(x),$$

которое удовлетворяло бы условиям $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) = 0$, ..., $y^{(n)}(x_0) = 0$. Это означает, что должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + C_3 y_3(x_0) + \dots + C_{n+1} y_{n+1}(x_0) = 0; \\ &C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + C_3 y_3'(x_0) + \dots + C_{n+1} y_{n+1}'(x_0) = 0; \\ &C_1 y_1''(x_0) + C_2 y_2''(x_0) + C_3 y_3''(x_0) + \dots + C_{n+1} y_{n+1}''(x_0) = 0; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &C_1 y_1^{(n)}(x_0) + C_2 y_2^{(n)}(x_0) + C_3 y_3^{(n)}(x_0) + \dots + C_{n+1} y_{n+1}^{(n)}(x_0) \equiv 0. \end{aligned} \tag{11.28}$$

Нетрудно убедиться в том, что в дальнейшем при рассмотрении последующих слагаемых чередование знаков сохранится, а все определители M_{k1} вычисляются по следующему правилу: их матрицы получаются из матрицы определителя $|A|$ вычеркиванием первого столбца и строки с номером k. Таким образом, $|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - \ldots + a_{n1}(-1)^{n+1}M_{n1}$. Определители M_{k1}, $k = 1, 2, \ldots, n$, называются *минорами*. Все они имеют порядок на одну единицу меньше, чем порядок определителя $|A|$, т.е. $(n - 1)$. Если миноры M_{k1} домножить на $(-1)^{k+1}$, то получатся числа $A_{k1} = (-1)^{k+1}M_{k1}$, называемые алгебраическими дополнениями к элементам матрицы a_{k1}. Таким образом, пришли к очередному свойству определителя.

Свойство 11. $|A| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1}$. Это представление называется *разложением определителя по первому столбцу*. С помощью этого разложения вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению n определителей порядка $(n - 1)$. Например, имея формулы для нахождения определителей третьего порядка, можно получить определители четвертого порядка. А умея вычислять определители четвертого порядка, можем получить определитель пятого и т.д.

Пример 2.9. Пусть требуется вычислить определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложив его по первому столбцу, получим

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Приведенное выше преобразование определителя единичной матрицы четвертого порядка в определитель единичной матрицы третьего порядка, показывает, что такое преобразование можно провести с определителем единичной матрицы любого порядка. Поэтому для любого n будет выполняться равенство $|E_n| = |E_{n-1}| = |E_{n-2}| = \ldots = |E_2| = |E_1| = 1$. Таким образом, определитель единичной матрицы любого порядка равен **1**.

В силу замечания к свойству 1 имеет место аналогичное разложение определителя по первой строке: $|A| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$, где $A_{1k} = (-1)^{k+1}M_{1k}$, а M_{1k} – миноры, т.е. определители порядка $(n - 1)$, матрицы которых получаются по тому же правилу: из матрицы определителя $|A|$ вычеркивается первая строка и k-й столбец.

Относительно величин C_1, C_2, C_3, ..., C_{n+1} эта система равенств представляет систему из $(n+1)$-го уравнения с определителем, равным нулю. Из теории однородных линейных систем алгебраических уравнений следует, что она имеет ненулевое решение, т.е. найдутся C_1, C_2, C_3, ..., C_{n+1}, не все равные нулю, и такие, что будут выполняться все равенства (11.28). Решение уравнения, полученное с помощью этих C_1, C_2, C_3, ..., C_{n+1} по формуле

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_{n+1} y_{n+1}(x),$$

удовлетворяет условиям $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, ..., $y^{(n)}(x_0) = 0$, и поэтому является решением следующей задачи Коши: найти решение уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$, удовлетворяющее условиям $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Но решением этой задачи Коши является функция, тождественно равная нулю. В силу единственности решения задачи Коши, построенное решение $y(x) \equiv 0$ на интервале (a, b). Или

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_{n+1} y_{n+1}(x) \equiv 0,$$

что означает линейную зависимость системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_{n+1}(x)$ на (a, b). ▲

Следствие 1. Если решения уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$ $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений, то любое решение уравнения линейно выражается через решения, входящие в фундаментальную систему.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — произвольное решение уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$. Составим новую систему из $(n+1)$-го решения, присоединив $y(x)$ к фундаментальной системе решений. По теореме 11.5 она является линейно зависимой, т.е. найдутся числа λ_0, λ_1, λ_2, ..., λ_n, не все равные нулю, и такие, что

$$\lambda_0 y(x) + \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots, + \lambda_n y_n(x) \equiv 0$$

на интервале (a, b). Заметим, что λ_0 не может быть равным нулю. В этом случае получилось бы, что система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ является линейно зависимой, что невозможно, так как эта система — фундаментальная. Пользуясь тем, что $\lambda_0 \neq 0$, имеем

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_k = -\dfrac{\lambda_k}{\lambda_0}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. ▲

Следствие 2. Если решения уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$ $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений, то общее решение этого уравнения может быть представлено в следующей форме:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \qquad (11.30)$$

где C_1, C_2, C_3, ..., C_n — произвольные постоянные.

Доказательство. Для доказательства надо проверить выполнение двух условий: 1) при любых значениях C_1, C_2, C_3, ..., C_n формула (11.30) дает решение уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$; 2) для любого, наперед заданного решения уравнения $\tilde{y}(x)$ найдется единственный набор констант $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n$ такой, что

$$\tilde{y}(x) = \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x) + \ldots + \tilde{C}_n y_n(x).$$

Первое условие, очевидно, выполняется, так как любая линейная комбинация решений уравнения, как было показано выше, снова является решением уравнения. Второе условие вытекает из следствия 1, но требуется доказать единственность набора констант $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n$. Если предположить, что имеется другой набор $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \ldots, \tilde{D}_n$, обеспечивающий равенство

$$\tilde{y}(x) = \tilde{D}_1 y_1(x) + \tilde{D}_2 y_2(x) + \ldots + \tilde{D}_n y_n(x),$$

то, вычитая левые и правые части первого и второго представлений функции $\tilde{y}(x)$, получим

$$(\tilde{C}_1 - \tilde{D}_1)\ y_1(x) + (\tilde{C}_2 - \tilde{D}_2)\ y_2(x) + \ldots + (\tilde{C}_n - \tilde{D}_n)\ y_n(x) \equiv 0$$

на интервале (a, b). Такое равенство возможно только тогда, когда выражения во всех скобках равны нулю, иначе получилось бы, что система $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно зависима. Таким образом, другого набора констант не существует. ▲

11.5.3. Линейные неоднородные уравнения

Теорема 11.6. Общее решение линейного неоднородного уравнения (11.23)

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

может быть представлено в следующем виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) + u(x), \quad (11.30)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений соответствуюшего однородного уравнения, а $u(x)$ — некоторое фиксированное частное решение неоднородного уравнения.

Доказательство. Пусть $v(x)$ — произвольное решение уравнения (11.23), т.е.

$$\mathbf{L}[v(x)] = f(x).$$

Тогда функция $w(x) = v(x) - u(x)$ будет решением соответствующего однородного уравнения. Действительно,

$$\mathbf{L}[w(x)] = \mathbf{L}[v(x) - u(x)] = \mathbf{L}[v(x)] - \mathbf{L}[u(x)] = f(x) - f(x) = 0.$$

Поэтому найдутся единственные константы $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n$ такие, что

$$w(x) = \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x) + \ldots + \tilde{C}_n y_n(x),$$

или

$$v(x) = \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x) + \ldots + \tilde{C}_n y_n(x) + u(x),$$

т.е. любое решение неоднородного уравнения $\mathbf{L}[v(x)] = f(x)$ при единственном наборе произвольных постоянных получается из формулы (11.30). С другой стороны, при любых значениях C_1, C_2, C_3,..., C_n формула (11.30) дает решение уравнения $\mathbf{L}[y(x)] = f(x)$.

Действительно,

$$\mathbf{L}[C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) + u(x)] =$$

$$= C_1\mathbf{L}[y_1(x)] + C_2\mathbf{L}[y_2(x)] + \ldots + C_n\mathbf{L}[y_n(x)] + \mathbf{L}[u(x)] = f(x),$$

поскольку $\mathbf{L}[y_k(x)] = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а $\mathbf{L}[u(x)] = f(x)$. Следовательно, формула (11.30) дает общее решение линейного неоднородного уравнения $\mathbf{L}[y(x)] = f(x)$. ▲

11.5.4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$, фигурирующие в уравнении (11.23), т.е.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

называются *коэффициентами* этого уравнения. До сих пор предполагалось, что эти коэффициенты — непрерывные на (a, b) функции.

В этом подразделе рассмотрим частный, но весьма важный, случай линейных уравнений: случай, когда коэффициенты не зависят от x, т.е. постоянны.

Итак, будем изучать линейные дифференциальные уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = f(x), \qquad (11.31)$$

где a_1, a_2, ..., a_n — действительные числа (a_0 — коэффициент при $y^{(n)}$ без ограничения общности можно считать равным единице). Естественно, что все результаты, полученные для уравнений с переменными коэффициентами, остаются справедливыми и для этих уравнений. В поисках частных решений, необходимых для построения фундаментальной системы решений и формулы общего решения, обычно обращаются к функциям вида $y = e^{kx}$. Если подставить эту функцию в однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = 0, \qquad (11.32)$$

то с учетом формулы

$$\frac{d^m e^{kx}}{dx^m} = k^m e^{kx}, \ \ m = 1, 2, \ldots,$$

получим

$$F(k)\,\mathrm{e}^{kx} \equiv (k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n)\mathrm{e}^{kx} = 0.$$

Многочлен

$$F(k) \equiv k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n$$

называется *характеристическим многочленом* уравнения или дифференциального оператора **L**, который можно представить как линейную комбинацию операторов дифференцирования разных порядков:

$$\mathbf{L} = \frac{d^n}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n.$$

Полученное в результате подстановки функции $y = \mathrm{e}^{kx}$ уравнение имеет вид

$$F(k)\,\mathrm{e}^{kx} = 0.$$

Если k — действительное число, то $\mathrm{e}^{kx} \neq 0$. Сокращая на e^{kx}, получим уравнение относительно k:

$$F(k) = 0.$$

Это алгебраическое уравнение степени n называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими корнями* уравнения (11.32) или соответствующего дифференциального оператора.

Если k таково, что $F(k) = 0$, то функция $y = \mathrm{e}^{kx}$ будет решением однородного уравнения. Поэтому нахождение характеристических корней уравнения приводит к нахождению частных решений однородного уравнения.

На этом пути появляется возможность найти n частных решений, которые могли бы составить фундаментальную систему решений. Дело в том, что по основной теореме алгебры алгебраическое уравнение n-й степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. Поэтому первый случай, когда имеется n различных решений, просматривается сразу: это случай, когда все корни действительны и различны: k_1, k_2, k_3, ..., k_n, $k_s \neq k_t$ при $s \neq t$. Тогда получаем n различных частных решений: $\mathrm{e}^{k_1x}, \mathrm{e}^{k_2x}, \mathrm{e}^{k_3x}, \ldots, \mathrm{e}^{k_nx}$.

Убедимся в том, что эта система решений линейно независима. Для этого рассмотрим линейную комбинацию этих решений

$$C_1\mathrm{e}^{k_1x} + C_2\mathrm{e}^{k_2x} + C_3\mathrm{e}^{k_3x} + \ldots + C_n\mathrm{e}^{k_nx}.$$

Пусть она тождественно равна нулю. Выберем из чисел k_1, k_2, k_3, ..., k_n наибольшее (пусть это будет k_1) и разделим равенство

$$C_1\mathrm{e}^{k_1x} + C_2\mathrm{e}^{k_2x} + C_3\mathrm{e}^{k_3x} + \ldots + C_n\mathrm{e}^{k_nx} = 0$$

на $e^{k_1 x}$. Получим

$$C_1 + C_2 e^{(k_2 - k_1)x} + C_3 e^{(k_3 - k_1)x} + \ldots + C_n e^{(k_n - k_1)x} = 0.$$

При увеличении x все слагаемые, начиная со второго, имея отрицательное число при x в показателе степени, стремятся к нулю. Отсюда следует, что $C_1 = 0$.

Рассуждая аналогично, получим, что все числа C_1, C_2, C_3, ..., C_n должны быть равными нулю. Следовательно, система решений $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$, $e^{k_3 x}$, ..., $e^{k_n x}$ линейно независима, т. е. образует фундаментальную систему решений. Поэтому общее решение однородного уравнения в этом случае будет иметь вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{k_3 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}. \qquad (11.33)$$

Пример 11.20. Пусть требуется найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + y'' - 2y' = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$k^3 + k^2 - 2k = 0.$$

Решая его, находим характеристические корни: $k_1 = -2$, $k_2 = 0$, $k_3 = 1$. Функции e^{-2x}, 1, e^x образуют фундаментальную систему решений. Общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 + C_3 e^x.$$

В рассмотренном случае характеристический многочлен раскладывается на линейные множители:

$$F(k) = (k - k_1)(k - k_2)\ldots(k - k_n),$$

где все k_1, k_2, ..., k_n различны. По образцу этого разложения можно разложить и дифференциальный оператор

$$\mathbf{L} = \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n = \left(\frac{d}{dx} - k_1\right)\left(\frac{d}{dx} - k_2\right)\ldots\left(\frac{d}{dx} - k_n\right).$$

Допустим теперь, что два корня совпадают, например, $k_n = k_{n-1}$. Тогда оператор можно записать в виде

$$L = \left(\frac{d}{dx} - k_1\right)\left(\frac{d}{dx} - k_2\right)\ldots\left(\frac{d}{dx} - k_{n-1}\right)\left(\frac{d}{dx} - k_n\right) =$$

$$= \left(\frac{d}{dx} - k_1\right)\left(\frac{d}{dx} - k_2\right)\ldots\left(\frac{d}{dx} - k_{n-2}\right)\left(\frac{d}{dx} - k_n\right)^2.$$

Если найти функцию $y(x)$ такую, что $\left(\frac{d}{dx} - k_n\right)^2 y(x) = 0$, то, очевидно, и $\mathbf{L}[y(x)] = 0$, т. е. $y(x)$ будет решением исходного однородного уравнения.

Рассмотрим подробнее уравнение

$$\left(\frac{d}{dx} - k_n\right)^2 y(x) = 0,$$

или

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) - 2k_n \frac{d}{dx} y(x) + k_n^2 y(x) = 0.$$

Введем в рассмотрение новую неизвестную функцию

$$z(x) = \mathrm{e}^{-k_n x} y(x)$$

или

$$y(x) = \mathrm{e}^{k_n x} z(x)$$

и подставим ее в это уравнение. Имеем:

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = k_n^2 \mathrm{e}^{k_n x} z(x) + 2k_n \mathrm{e}^{k_n x} z'(x) + \mathrm{e}^{k_n x} z''(x);$$

$$-2k_n \frac{d}{dx} y(x) = -2k_n (k_n z(x) + z'(x)) \mathrm{e}^{k_n x} = -2k_n^2 z(x) \mathrm{e}^{k_n x} - 2k_n z'(x) \mathrm{e}^{k_n x};$$

$$k_n^2 y(x) = k_n^2 \mathrm{e}^{k_n x} z(x).$$

Складывая левые и правые части последних трех равенств, получим, что функция $z(x)$ является решением уравнения

$$0 = \mathrm{e}^{k_n x} z''(x).$$

Сокращая на множитель $\mathrm{e}^{k_n x}$, в итоге имеем уравнение

$$z''(x) = 0.$$

Его общее решение легко находится двумя последовательными интеграциями:

$$z(x) = C_1 + C_2 x.$$

Следовательно, общее решение уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) - 2k_n \frac{d}{dx} y(x) + k_n^2 y(x) = 0$$

имеет вид

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{k_n x} + C_2 x \mathrm{e}^{k_n x},$$

откуда видно, что функции $\mathrm{e}^{k_n x}$ и $x\mathrm{e}^{k_n x}$ будут решениями этого уравнения. Таким образом, в случае совпадения двух корней (кратность корня $k = k_n$ равна двум) им соответствует два решения: $\mathrm{e}^{k_n x}$ и $x\mathrm{e}^{k_n x}$.

Аналогично можно показать, что при совпадении s корней:

$$k_n = k_{n-1} = k_{n-2} = \ldots = k_{n-s+1}$$

им будет соответствовать s решений $e^{k_n x}$, $xe^{k_n x}$, $x^2e^{k_n x}$, ..., $x^{s-1}e^{k_n x}$, которые, как нетрудно доказать, образуют линейно независимую подсистему всей системы решений однородного уравнения. Эти рассуждения помогают получить результат о формуле общего решения однородного уравнения в случае, когда все характеристические корни являются действительными числами.

Приведем без вывода описание фундаментальной системы решений. Итак, в фундаментальную систему решений каждый действительный характеристический корень $k = k_0$ вводит своего представителя $e^{k_0 x}$, а если этот корень имеет кратность s, где $s > 1$, то дополнительно включаются решения $xe^{k_0 x}$, $x^2e^{k_0 x}$, ..., $x^{s-1}e^{k_0 x}$. В итоге набирается n решений, которые и составляют фундаментальную систему решений.

Пример 11.21. Пусть требуется найти общее решение уравнения

$$y^{\mathrm{IV}} - 2y''' - 3y'' + 8y' - 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^4 - 2k^3 - 3k^2 + 8k - 4 = 0.$$

Разлагая характеристический многочлен на множители, получим

$$(k-2)(k+2)(k-1)^2 = 0,$$

откуда $k_1 = -2$, $k_2 = k_3 = 1$, $k_4 = 2$. Фундаментальная система решений имеет вид: e^{-2x}, e^x, xe^x, e^{2x}. Следовательно, общее решение дается формулой

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^x + C_3xe^x + C_4e^{2x}.$$

В интегральном исчислении обычно используется разложение многочлена на множители (без использования комплексных чисел). Многочлен с действительными коэффициентами всегда может быть разложен на множители также с действительными коэффициентами. Эти множители могут быть линейными, как, например, в приведенном примере, или квадратичными, т.е. иметь вид

$$(k^2 + pk + q),$$

где $p^2 < 4q$. В этом случае выделением полного квадрата можно преобразовать множитель:

$$(k^2 + pk + q) = \left(k + \frac{p}{2}\right)^2 + r^2,$$

где $r^2 = \frac{1}{4}(4q - p^2)$. Соответствующий дифференциальный оператор имеет вид

$$\left(\frac{d}{dx} + \frac{p}{2}\right)^2 + r^2,$$

и, решая дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d}{dx}+\frac{p}{2}\right)^2 y(x)+r^2y(x)=0,$$

найдем частные решения однородного уравнения, порождаемые множителем (k^2+pk+q). Решение этого уравнения проводится по той же схеме, что и выше: вводится неизвестная функция

$$z(x)=\mathrm{e}^{\frac{p}{2}x}y(x)$$

и в уравнении производится замена $y(x)$ на $z(x)$. Для функции $z(x)$ уравнение упрощается и имеет следующий вид:

$$z''(x)\;+\;r^2z(x)\;=\;0.$$

Это уравнение не содержит переменного x, и можно понизить его порядок, а затем — проинтегрировать. Получим, что общее решение этого уравнения представляется в виде

$$z(x)\;=\;C_1\sin(rx)\;+\;C_2\cos(rx).$$

Возвращаясь к функции $y(x)$, получим

$$y(x)\;=\;C_1\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}\sin(rx)\;+\;C_2\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}\cos(rx).$$

Таким образом, множитель (k^2+pk+q) в характеристическом многочлене порождает пару решений однородного уравнения:

$$\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}\sin(rx)\quad\text{и}\quad\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}\cos(rx),$$

которые должны быть включены в фундаментальную систему решений.

Подробное доказательство этого факта технически громоздко и малопоучительно с идейной точки зрения. Поэтому здесь его не приводим.

Рассмотренный случай разобран при молчаливом предположении, что все квадратичные множители различны. Но может оказаться, что среди них попадутся одинаковые. Тогда эти одинаковые множители можно собрать в один, записав его в виде

$$(k^2+pk+q)^s,$$

где $s>1$, и доказать, что этому множителю характеристического многочлена в фундаментальной системе решений соответствует следующая группа частных решений:

$$\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}\sin(rx),\ \mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}\cos(rx),\ x\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}\sin(rx),\ x\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}\cos(rx),\ x^2\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}\sin(rx),$$

$$x^2\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}\cos(rx),\ \ldots,\ x^{s-1}\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}\sin(rx),\ x^{s-1}\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}\cos(rx).$$

Пример 11.22. Пусть требуется найти общее решение следующего дифференциального уравнения:

$$y^{\mathrm{IV}} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0.$$

Характеристический многочлен

$$k^4 - 8k^3 + 26k^2 - 40k + 25$$

можно представить в виде

$$(k^2 - 4k + 5)^2 = [(k - 2)^2 + 1]^2.$$

Выписывая фундаментальную систему решений, найдем общее решение:

$$y(x) = [(C_1 + C_2x) \sin x + (C_3 + C_4x) \cos x] \mathrm{e}^{2x}.$$

Таким образом, на основе вышеизложенного можно сделать вывод, что решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами всегда доводится до общего решения, если удается разложить характеристический многочлен на линейные и квадратичные множители. Эта последняя задача относится к алгебре, и здесь ее обсуждать не будем.

11.5.5. Линейные неоднородные уравнения. Метод вариации постоянных

Для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения следует сначала найти общее решение соответствующего однородного уравнения, а затем — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения. Если первая часть задачи у нас уже не вызывает принципиальных трудностей, то вторая — как найти частное решение неоднородного уравнения, пока неизвестна.

Существует несколько способов нахождения частного решения неоднородного уравнения.

Один из них, называемый *методом подбора*, продемонстрируем на примере.

Пример 11.23. Пусть требуется найти общее решение уравнения

$$y'' + 9y = x^2.$$

Общее решение однородного уравнения $y'' + 9y = 0$:

$$y(x) = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x.$$

Попытаемся найти частное решение неоднородного уравнения в виде многочлена той же второй степени, т. е. будем искать решение в виде

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставив в уравнение вместо $y(x)$ функцию $Ax^2 + Bx + C$, получим

$$2A + 9Ax^2 + 9Bx + 9C \equiv x^2.$$

Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда у них совпадают коэффициенты при одинаковых степенях. Приравняв эти коэффициенты, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 9A = 1; \\ 9B = 0; \\ 2A + 9C = 0. \end{cases}$$

Неизвестные A, B и C однозначно определяются, таким образом, требуемое частное решение:

$$y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{81}.$$

Теперь имеем возможность написать общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{81}.$$

Метод подбора прост в употреблении, но имеет и ряд недостатков. Прежде всего, он не универсален, т.е. применим не всегда, а только для некоторого, хотя и важного, набора правых частей в неоднородном уравнении. Кроме того, употребление его в общем случае (когда он применим) связано с непростым сопоставлением набора корней характеристического уравнения и правой части уравнения, от которого зависит, в какой форме ищется частное решение, т.е. технология его применения не так проста, как может показаться после рассмотрения примера. Тем не менее репутация этого метода такова: когда он применим, его использование предпочтительно.

Другой метод, называемый *методом вариации произвольных постоянных*, в отличие от предыдущего универсален и алгоритмически прост. Он применим и к уравнениям с переменными коэффициентами. Поэтому изложим его как основной метод решения неоднородного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных также предполагает решение соответствующего однородного уравнения. Будем считать, что функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений для однородного уравнения. Тогда общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + C_3\varphi_3(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x).$$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание учебника соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта для специальностей технического профиля среднего профессионального образования, таких, как «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» (2201), «Автоматизированные системы обработки информации и управления» (2202), «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (2203).

Авторы надеются, что книга будет востребована при реализации учебных программ по математике и для других специальностей.

Дело в том, что учебный материал, представленный в книге, соответствует той базовой части математического образования, которая для всех специальностей является основой как дальнейшего математического образования, так и приложений к решению технических задач, отвечающих конкретным проблемам.

Что касается методики изложения, то авторы стремились добиться максимального уровня математической строгости и безусловно исключить какие-либо недоговоренности научного характера. В тех же местах, где по каким-либо причинам полного обоснования теорем дать невозможно, приводятся «неформальные» разъяснения существа сформулированных утверждений, а также поясняющие рисунки и конкретные примеры.

Такому подходу изложения материала способствует и современная тенденция широкого использования различных обучающих прикладных пакетов в процессе математического образования. Разумеется, даже самые лучшие пакеты обучающих программ не могут заменить вдумчивого изучения теоретических основ математики. Однако в самом процессе освоения учебных программ их сбалансированное использование весьма полезно и существенно. Поэтому в дополнение к основному тексту книги дано приложение — краткое описание математического пакета MAPLE, применимое к любой его версии. Авторы надеются, что этот пакет будет использован читателями при решении практических задач, соответствующих основному теоретическому материалу книги.

Для того чтобы помочь читателю лучше ориентироваться в тексте, а также в структуре и в логике доказательства, использован специальный знак ▲, означающий окончание доказательства.

Авторы будут благодарны всем читателям, которые сообщат свои замечания и пожелания по адресу: 111250, Москва, Красноказарменная ул., 14, МЭИ (ТУ), кафедра математического моделирования.

Пусть теперь в матрице определителя $|A|$ выбран произвольный столбец с номером j, (j — любое число от 2 до n). Тогда можно последовательной перестановкой соседних столбцов поставить его на первое место. Таких перестановок, называемых *смежными*, придется сделать $(j - 1)$. Поэтому преобразованный определитель $|\overline{\overline{A}}|$ будет отличаться от исходного множителем $(-1)^{j-1}$, т.е. $|A| = (-1)^{j-1}|\overline{\overline{A}}|$. Разложив определитель $|\overline{\overline{A}}|$ по первому столбцу, получим

$$|A| = (-1)^{j-1}|\overline{\overline{A}}| = (-1)^{j-1}\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ \overline{\overline{A}}_{kj}, \text{ где } \overline{\overline{A}}_{kj} = (-1)^{k+1}M_{kj}.$$

В данном случае числа M_{kj} равны определителям $(n - 1)$-го порядка, матрицы которых получаются из матрицы определителя $|A|$ вычеркиванием k-й строки и j-го столбца.

Определители M_{kj} называются *дополнительными минорами* к элементам матрицы определителя $|A|$ a_{kj}, а числа $A_{kj} = (-1)^{k+j}M_{kj}$ — алгебраическими дополнениями к элементам a_{kj}. Тогда рассмотренное выше равенство можно записать в такой форме: $|A| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$. Оно вполне аналогично разложению по первому столбцу с той только разницей, что здесь j — любое число. Естественно называть это представление разложением определителя по j-му столбцу.

В силу замечания к свойству 1 аналогичное разложение справедливо и для любой i-й строки:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \tag{2.1}$$

называемое *разложением определителя* $|A|$ по i-й строке (i — любое число от 1 до n). Таким образом, определитель может быть разложен по любому столбцу или по любой строке матрицы A. Это свойство определителя позволяет более рационально организовать его вычисление.

Пример 2.10. Пусть требуется вычислить определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прежде чем раскладывать определитель по какой-либо строке или столбцу, преобразуем его, пользуясь свойством 9, в частности тем, что можно к любой строке прибавить другую строку, умноженную на число, не изменив при этом величины исходного

Теперь будем искать частное решение неоднородного уравнения в таком же виде с той разницей, что постоянные C_1, C_2, C_3, ..., C_n теперь считаем неизвестными функциями от x, т.е.

$$y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x) + C_3(x)\varphi_3(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n(x).$$

Для их нахождения требуется решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) + C_3'(x)\varphi_3(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n(x) = 0; \\ C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) + C_3'(x)\varphi_3'(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n'(x) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + C_3'(x)\varphi_3^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x), \end{cases}$$

где $f(x)$ — правая часть неоднородного уравнения.

Можно доказать, что эта система всегда однозначно разрешима и ее решение можно найти, например, по правилу Крамера. В результате решения системы получится n соотношений

$$C_1'(x) = h_1(x),\ C_2'(x) = h_2(x),\ C_3'(x) = h_3(x),\ \ldots,\ C_n'(x) = h_n(x),$$

где функции $h_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ — известны. В качестве функций $C_j(x)$ берем $\int\limits_{x_0}^{x} h_j(t)\,dt$, где x_0 — произвольная точка. В итоге оказывается найденным частное решение неоднородного уравнения и теперь можно написать общее решение

$$y(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + C_3\varphi_3(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) +$$
$$+ C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x) + C_3(x)\varphi_3(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n(x).$$

Замечание. В случае неоднородного уравнения с переменными коэффициентами эффективность метода несколько падает, поскольку в этом случае нет общего метода построения фундаментальной системы решений.

Пример 11.24. Пусть требуется найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + 2y = 4x^2e^{-x^2}.$$

Решаем сначала однородное уравнение

$$y'' + 2y = 0.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 2 = 0.$$

В соответствии с теорией получаем, что общее решение однородного уравнения дается формулой

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cos(\sqrt{2}x).$$

Теперь ищем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y(x) = C_1(x)\sin(\sqrt{2}x) + C_2(x)\cos(\sqrt{2}x).$$

Составляем систему уравнений по предписанному выше правилу:

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin(\sqrt{2}\,x) + C_2'(x)\cos(\sqrt{2}\,x) = 0; \\ C_1'(x)\cos(\sqrt{2}\,x) - C_2'(x)\sin(\sqrt{2}\,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}4x^2 e^{-x^2} \end{cases} \tag{11.34}$$

и решаем ее по правилу Крамера. Определитель системы $\Delta = -1$. Находим определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos(\sqrt{2}x) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}4x^2 e^{-x^2} & -\sin(\sqrt{2}x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}4x^2 e^{-x^2}\cos(\sqrt{2}x)$$

и

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sin(\sqrt{2}x) & 0 \\ \cos(\sqrt{2}x) & \dfrac{1}{\sqrt{2}}4x^2 e^{-x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}4x^2 e^{-x^2}\sin(\sqrt{2}x),$$

откуда получим

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\Delta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}4x^2 e^{-x^2}\cos(\sqrt{2}x);$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\Delta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}4x^2 e^{-x^2}\sin(\sqrt{2}x).$$

Интегрирование по частям позволяет вычислить интегралы от этих функций. Имеем

$$C_1(x) = e^{-x^2}\left(\sin(\sqrt{2}x) - \sqrt{2}x\cos(\sqrt{2}x)\right);$$

$$C_2(x) = e^{-x^2}\left(\cos(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}x\sin(\sqrt{2}x)\right),$$

откуда получаем частное решение неоднородного уравнения

$$y(x) = e^{-x^2}\left(\sin(\sqrt{2}x) - \sqrt{2}x\cos(\sqrt{2}x)\right)\sin(\sqrt{2}x) +$$

$$+ e^{-x^2}\left(\cos(\sqrt{2}x) - \sqrt{2}x\sin(\sqrt{2}x)\right)\cos(\sqrt{2}x) =$$

$$= e^{-x^2}\left(\cos^2(\sqrt{2}x) + \sin^2(\sqrt{2}x)\right) = e^{-x^2}.$$

Таким образом, общее решение уравнения $y'' + 2y = 4x^2 e^{-x^2}$ имеет вид

$$y(x) = C_1\sin(\sqrt{2}x) + C_2\cos(\sqrt{2}x) + e^{-x^2}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

$$x\frac{dy}{dx} + y = y^2.$$

2. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$x\frac{dy}{dx} = y\ln\left(\frac{y}{x}\right).$$

3. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2x^3y^3.$$

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x + \sin x.$$

5. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x + \frac{dy}{dx}.$$

6. Решите следующую задачу Коши: найти решение дифференциального уравнения

$$2\frac{d^2y}{dx^2} = 3y^2,$$

удовлетворящее начальным условиям $y(-2) = 1$, $\frac{dy}{dx}(-2) = -1$.

7. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

8. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 13y = 0.$$

9. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x.$$

10. Найдите частное решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2(1-x),$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $\frac{dy}{dx}(0) = 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Введение в математический пакет MAPLE

Многие практические задачи, связанные с использованием данного курса математики, можно решить с помощью компьютера. В настоящее время имеется несколько мощных математических пакетов, позволяющих решать такие задачи быстро и эффективно. Одному из них, а именно пакету **MAPLE**, посвящена эта небольшая справка.

Математический пакет **MAPLE** имеет несколько версий, называемых реализациями. Наибольшее распространение имеют реализации **MAPLE V R5**, **MAPLE VI** и **MAPLE VII**. Для начинающего пользователя эти реализации практически неразличимы. Поэтому то, что будет дано в качестве руководства к использованию пакета, применимо к любой из этих реализаций.

Наиболее простой режим работы пакета — диалоговый. Приглашение к диалогу пакет осуществляет путем высвечивания на экране в начале строки знака > . Пользователь набирает вопрос и нажимает клавишу Enter (Ввод). В ответ компьютер выводит на экран монитора соответствующую информацию.

Например:

> 13 + 5 − 4;

$$14$$

> sin (1.0);

$$.841470985$$

Знак (;) после введенного вопроса обеспечивает выдачу ответа незамедлительно. В приведенных примерах числа 14 и .841470985 это реакция пакета на введенные вопросы. Бывает так, что вопрос состоит из нескольких пунктов. Например, пусть требуется решить уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$. Можно поступить так: сначала определить функцию $f(x) = x^2 - 3x + 2$, а затем решить уравнение $f(x) = 0$. Это делается так:

> f := x^2 − 3*x + 2 : g := solve (f = 0, x);

В ответ на этот вопрос на экране появятся корни уравнения:

$$g := 2,\ 1$$

Из этого примера видно, что вводимые вопросы задаются по правилам, принятым для всех компьютерных строчных редакторов. Запись f := при задании вопроса означает, что выражение, стоящее справа, обозначается через f. После введения обозначения поставлен знак (:), а не (;). Поэтому на экране никакой реакции на этот вопрос не последовало. Если бы был поставлен знак (;), то на экране был бы такой ответ:

$$f := x^2 - 3x + 2$$

$$g := 2,\ 1$$

После того как компьютер «отчитался» по заданному вопросу, на экране вновь появляется приглашение к диалогу, т.е. в начале строки высвечивается знак >. Если же отчет не удался по причине некорректного вопроса, выдается указание об ошибке (а иногда и подсказка об исправлении).

Например,

> sin(1,0);

Error, (in sin) expecting 1 argument, got 2

Здесь пользователь число 1 записал не с точкой, а с запятой. Пакет воспринял число 1,0 как два числа 1 и 0, что недопустимо при использовании встроенной функции sin(x). Ошибка фиксируется и дается подсказка, правда, на английском языке. Если пользователь не знает английского языка и не понял, чем «не доволен» пакет, то следует внимательно проанализировать введенное выражение вопроса, соблюдены ли все «правила игры», памятуя о том, что компьютер всегда прав. После исправления текста вопроса следует поставить курсор в любое место текста вопроса и нажать клавишу Enter.

Важным свойством пакета является способность к символьному исчислению, т. е. преобразование и работа с буквенными выражениями. Например, могут быть решены в буквенной форме:

• квадратное уравнение

> f := solve (a*x^2 + b*x + c = 0, x);

$$f := \frac{1}{2}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{a},\ \frac{1}{2}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{a};$$

• производная от функции sin (3x)

> f := sin (3*x): g: = diff (f, x);

$$g := 3\cos(3x);$$

• неопределенный интеграл $\int \cos 5x\,dx$:

> f := cos (5*x): g := int (f, x);

$$g := \frac{1}{5}\sin(5x);$$

• сумма числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

> g := sum (1/n^2, n = 1 .. infinity);

$$g: = \frac{1}{6}Pi^2.$$

Здесь Pi означает число $\pi = 3.14159265...$.

Систематическое описание математического пакета **MAPLE** в рамках этого приложения невозможно. Поэтому целесообразно рассмотреть только те задачи, которые возникают при изучении курса высшей математики, изложенного в данном учебнике. Это проще сделать, демонстрируя на примерах решения типовых задач.

1) В этом пункте рассматриваются задачи, связанные с разделом «Элементы линейной алгебры». Для решения таких задач следует предварительно загрузить пакет расширения **linalg**. Это делается следующим образом: вводится команда

> with (linalg):

После этого можно пользоваться функциями этого пакета расширения. Первое, чему здесь необходимо научиться, — это введению в компьютер матрицы, что выполняется следующим образом. Пусть требуется ввести матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & -5 & -6 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & -7 & 8 & 1 \\ 5 & -4 & -3 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ввод происходит построчно слева направо. В скобках, содержащих информацию о вводимой матрице, стоят прежде всего два числа: число строк и число столбцов в вводимой матрице, затем в квадратных скобках перечисляются последовательно, через запятую, все ее элементы.

```
> A := matrix (4, 5, [2, 1, 3, 7, 4, 3, –5, –6, 3, 1, –4, 0, –7, 8, 1, 5, –4, –3, 10, 5]);
```

После нажатия клавиши Enter на экране появится матрица *A*. Точку с запятой ставить не обязательно, можно поставить и двоеточие. Тогда матрица *A* на экране не появится и не будет возможности проверить визуально правильность ввода матрицы. Если матрица введена, то теперь можно производить с ней различные операции:

- нахождение ранга матрицы

```
> r := rank (A);
```

$$r := 3$$

- вычисление определителя матрицы

```
> B := matrix (3, 3, [-1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]);
```

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

```
> s := det (B);
```

$$s := 6$$

- нахождение обратной матрицы

```
> T := inverse (B);
```

$$T := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -5 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{11}{3} & -\frac{13}{6} \end{bmatrix}$$

- нахождение произведения матриц

```
> C := matrix (3, 3, [0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0]);
```

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

> F := multiply (B, C);

$$F := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 11 & 10 & 9 \\ 17 & 16 & 15 \end{pmatrix}$$

(здесь матрица F равна произведению матриц: $F = BC$);

- сложение двух матриц; например, если матрица $P = F + C$, то

> P := evalm (F + C);

$$P: = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 12 & 10 & 10 \\ 18 & 17 & 15 \end{pmatrix}$$

Следующая важная операция — это введение координат вектора в виде строки. Например, требуется ввести четырехмерный вектор $H = (-3, 2, 1, 5)$. Это делается так:

> H := vector (4, [-3, 2, 1, 5]);

$$H := [-3, 2, 1, 5]$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы решать системы линейных алгебраических уравнений. Пусть имеется система трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -10; \\ 5x + 3y + 3z = 27; \\ x + y + z = 7. \end{cases}$$

Вводим матрицу системы $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и вектор из правых частей $S = (-10, 27, 7)$.

> Q: = matrix (3, 3, [1, –2, –3, 5, 3, 3, 1, 1, 1]); S: = vector (3, [–10, 27, 7]);

$$Q: = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S: = [-10, 27, 7]$$

Теперь запускаем решение системы:

> X: = linsolve (Q, S);

$$X: = [3, -1, 5]$$

Выданный результат надо истолковывать так: решение найдено и

$$x = 3; y = -1; z = 5.$$

Если введены координаты двух геометрических векторов $\mathbf{a} = \{-4, 2, 1\}$ и $\mathbf{b} = \{1, -5, 3\}$, то можно определить их скалярное и векторное произведения. Это делается следующим образом:

```
> U: = vector (3, [-4, 2, 1]): V: = vector (3, [1, –5, 3]): sc: = dotprod (U,V);
W: = crossprod (U,V);
```

$$sc: = -11$$

$$W: = [11,\ 13,\ 18]$$

Полученный результат означает, что (**a**, **b**) = –11, [**a**, **b**] = {11, 13, 18}.

В заключение этого пункта полезно отметить, что многие матричные функции способны производить вычисления и выдавать результаты в символьном виде.

Например, найдем обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Имеем:

```
> A := matrix (2, 2, [a,b,c,d]): B: = inverse (A);
```

Получим:

$$B: = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix},$$

т.е. обратную матрицу к матрице A в символьном (буквенном) виде.

2) В числе пакетов расширений **MAPLE** содержится пакет геометрических расчетов, подключаемый с помощью команды

```
> with (geometry):
```

Он позволяет решать некоторые типовые задачи по аналитической геометрии на плоскости. Но эффективность его невелика главным образом потому, что применение его к сложным задачам требует более высокой степени освоения системы **MAPLE**, а несложные задачи по аналитической геометрии на плоскости проще решать без использования пакета, особенно для начинающих пользователей.

3) В этом пункте рассматриваются задачи, относящиеся к разделу «Основы математического анализа». Прежде всего следует ознакомиться с встроенными элементарными функциями и встроенными константами. Начнем с констант.

Для решения задач этого раздела из всего набора встроенных констант могут оказаться полезными только две: число π, обозначаемое в пакете как Pi, и мнимая единица $i = \sqrt{-1}$, обозначаемая как I. Число е среди встроенных констант отсутствует, в качестве него рекомендуется использовать exp (1). Если требуется получить численное значение какой-либо величины, представленной в виде некоторого выражения F, содержащего известные на данном этапе вычислений переменные и функции, то это можно сделать с помощью команды evalf (F,n), где n — количество требуемых цифр после десятичной точки. Например,

```
> evalf (sin (1), 5);
```

$$.84147$$

Число n можно не указывать. В этом случае по умолчанию считается, что n = 10.

Эта команда бывает необходима, когда аргументом у элементарной функции является фундаментальная константа, целое или рациональное число. В этом случае пакет выводит не численное значение функции, а обозначение этой функции со значением аргумента. Например,

```
> ln (2);
```

ln (2)

```
> evalf (ln (2));
```

.6931471806

Теперь познакомимся со встроенными функциями. Их очень много, но нам интересны только элементарные функции. **MAPLE** имеет полный набор таких функций. Их обозначения в основном совпадают с теми обозначениями, которые приняты в математической литературе. Но есть и некоторые отличия. Прежде всего степенная и показательная функции вводятся в соответствии с правилами строчных редакторов: вместо x^{α} и a^{x} следует писать x^α и a^x. Для функции e^x имеется специальное обозначение: exp (x), как и для квадратного корня $\sqrt{x}$, который обозначается как sqrt (x). В тригонометрических функциях по-другому обозначаются тангенс и котангенс: tan (x) и cot (x), так же как и обратные к ним: arctan (x) и arccot (x). Натуральный логарифм не отличается обозначением от общепринятого, а для десятичного логарифма используется обозначение log 10 (x). Произведение двух величин обозначается знаком *. Например, 3sin(2x) следует записать так: 3*sin(2*x). Деление обозначается знаком /. Например, функцию $\frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2}$ следует записать так: tan (x) / (1 + x^2).

Рассмотрим теперь задачу нахождения предела последовательности. Пусть требуется найти $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, где s_n — некоторое выражение, заданное как функция от *n*. Тогда результат может быть получен с помощью команды:

```
> f: = Sn: L: = limit (f,n = infinity);
```

Например, пусть требуется найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$. Имеем:

```
> f: = ((sqrt (n^2 + 1) + n)^2)/ ((n^6 + 1)^(1/3)): L: = limit (f, n = infinity);
```

L: = 4

Вычисление предела функции непрерывного аргумента осуществляется по этой же схеме. Например, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ вычисляется следующим образом:

```
> f := (x^2 − sqrt (x))/(sqrt (x) − 1): L: = limit (f, x = 1);
```

L := 3

Рассмотрим задачу нахождения производной функции $y = F(x)$. Эта задача решается символьно с помощью команды:

```
> f := F (x): g: = diff (f, x);
```

Например, пусть требуется продифференцировать функцию $y=\sqrt{x}$. Имеем:

```
> f := sqrt (x): g: = diff (f, x);
```

$$g: = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Чтобы вычислить производную высокого порядка, используется оператор $.

Например, чтобы найти четвертую производную от $\sqrt{x}$, следует ввести команду

```
> f := sqrt (x): g: = diff (f, x$4);
```

Часто бывает необходимо найти производную в заданной точке $x = x_0$. Для этого используется функция subs. Например, для нахождения значения второй производной от функции e^{-x^2} в точке $x = 0$ следует ввести команды:

```
> f := exp (–x^2): g: = diff (f, x$2): h: = subs (x = 0, g); k: = value (h);
```

$$h: = -2\,\mathbf{e}^0$$

$$k: = -2$$

Без каких-либо усложнений находятся частные производные. Например, если $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и нас интересует четвертая производная $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x \partial^3 y}$, то результат получается с помощью команды:

```
> z := sqrt (x^2 + y^2): g: = diff (z, x, y$3);
```

$$g: = -15\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{9xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Переходим к задачам интегрального исчисления. Неопределенные интегралы $\int f(x)dx$ вычисляются с помощью следующей команды:

```
> f: = f(x): g: = int (f, x);
```

Например, пусть требуется вычислить $\int x \cos x\, dx$. Имеем:

```
> f: = x * cos (x): g: = int (f,x);
```

$$g: = x \sin(x) + \cos(x)$$

Бывает так, что **MAPLE** не может вычислить интеграл. Тогда возвращается исходная запись интеграла.

Часто при вычислении неопределенного интеграла возникает задача разложения рациональной функции $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на простые дроби. Здесь $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Для решения этой задачи необходимо разложить знаменатель $Q(x)$ на множители с вещественными коэффициентами. Эта задача может быть решена командой:

```
> f := factor (Q(x));
```

Например, пусть $Q(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$. Имеем:

определителя. Прибавим ко второй строке первую строку, умноженную на (–2). Получим

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далее прибавим к третьей строке первую, умноженную на (–3). Получим

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -10 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Еще один шаг: прибавление к последней строке первой дает

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -10 \\ 0 & 5 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

После таких преобразований разложение определителя по первому столбцу будет содержать только одно слагаемое (все остальные равны нулю). Получим

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -10 \\ 5 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -10 \\ 5 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель уже можно вычислить, пользуясь формулой для определителя третьего порядка. Имеется другой путь — продолжить преобразование его матрицы по той же схеме: делая нулями элементы первого столбца. Вычитая первую строку из второй, получим

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \\ 5 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя к последней строке первую, умноженную на 5, получим, снова разлагая по первому столбцу,

> f := factor (x^4 + x^3 + 2*x^2 + x + 1);

$$f := (x^2 + x + 1)(x^2 + 1)$$

Вычисление определенных интегралов $\int_a^b f(x)\,dx$ осуществляется командой

> f := int (f(x), x = a .. b);

Например, вычислим интеграл $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$. Имеем:

> f := int ((x – 1)/ (sqrt (x) + 1), x = 4 .. 9);

$$f := \frac{23}{3}$$

В том случае, когда предел интегрирования бесконечен, вместо числа ставится infinity в случае $+\infty$ и –infinity в случае $-\infty$. Например, при вычислении интеграла $\int_0^\infty e^{-2x}\cos 6x\,dx$ следует ввести команду:

> f := int (exp(– 2 * x) * cos(6 * x), x = 0 .. infinity);

$$f: = \frac{1}{20}$$

Вычисление кратных интегралов возможно только после того, как интеграл записан как повторный, т.е. в нем произведена расстановка пределов.

Например, тройной интеграл $\iiint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a\\0\le z\le a}} (x^2+y^2)z\,dxdydz$ вычисляется командой:

> f := int (int (int ((x^2 + y^2) * z, x = 0 .. a) y = 0 .. a) z = 0 .. a);

$$f: = \frac{1}{3}a^6$$

а двойной интеграл $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{y^2}(2-x-y)\,dxdy$ — командой

> f := int (int (2 – x – y, x = sqrt (y) .. y^2) y = 0 .. 1);

$$f: = -\frac{11}{30}$$

Кратко перечислим некоторые другие возможности пакета **MAPLE:**

• построение графика функции $y = f(x)$ на интервале (отрезке) осуществляется командой plot (f(x), x = a .. b);

• нахождение максимумов и минимумов функции $y = f(x)$ осуществляется командами maximize (f(x), x = a .. b, location); и minimize (f(x), x = a .. b, location);

• эти же команды применимы и к функциям нескольких переменных, например,

> minimize (x^2 – 3*x + y^2 + 3*y + 3, location);

$$-\frac{3}{2}, \left\{\left[\left\{y = -\frac{3}{2}, x = \frac{3}{2}\right\}, -\frac{3}{2}\right]\right\}$$

(в приведенном примере число $-\frac{3}{2}$ равно минимуму функции; параметр location обеспечивает выдачу координат точки минимума и значения функции в точке минимума; если его опустить, то в ответе будет выдано только значение минимума функции, т.е. число $-\frac{3}{2}$);

• исследовать числовой ряд на сходимость программе, как правило, не удается; имеется возможность суммировать ряды в том случае, когда ответ может быть выражен как значение элементарной функции в некоторой точке; например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится и его сумма равна ln (2); поэтому его сходимость и сумма могут быть обнаружены командой:

> sum (((–1)^(n + 1)) * (1/n), n = 1.. infinity);

$$\ln(2)$$

другой сходящийся ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ имеет сумму, не выражающуюся через значения элементарных функций; программа ничего с этим рядом сделать не может: ни обнаружить его сходимость, ни найти его сумму; в некоторых случаях программе удается обнаружить расходимость ряда; например, в случае гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ на команду sum (1/n, n = 1 .. infinity); пакет выдает ответ: ∞;

• решение дифференциальных уравнений первого порядка осуществляется с помощью команды dsolve (ODE, y(x)); где ODE означает дифференциальное уравнение, в котором производная записана как diff (y(x), x); например,

> dsolve (diff (y(x), x) – y(x) = exp (–x), y(x));

$$y(x) = \left(-\frac{1}{2}e^{(-2x)} + C_1\right)e^x;$$

• решение дифференциального уравнения второго порядка $y'' - y' =$ $= \sin x$ показано в следующем примере:

> dsolve (diff (y(x), x$2) – diff (y(x),x) = sin(x), y(x));

$$y(x) = -\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) + e^x C_1 + C_2.$$

В заключение следует отметить, что поддержка, даваемая пакетом **MAPLE**, не может заменить знаний, необходимых для решения задач курса высшей математики. Его применение вслепую очень ограничено и приносит мало пользы обучающемуся. Поэтому следует стремиться к пониманию того, что делает компьютер. Это позволит лучше использовать возможности пакета не только как вычислительного, но и как аналитического средства решения задач.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ГЛАВА 1

1. Пусть x является элементом множества $\overline{A \cup B}$, т.е. $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда $x \notin A \cup B$. Следовательно, $x \notin A$ и $x \notin B$. Но тогда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, а значит, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, что и требовалось доказать. Пусть теперь, наоборот, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, откуда следует, что $x \notin A$ и $x \notin B$, а значит, $x \notin A \cup B$, т.е. $x \in \overline{A \cup B}$.

2. $\Omega = \{AC;\ AD;\ AE;\ BD;\ BE;\ BF;\ CE;\ CF;\ DF\}$.

3. Пусть $\Omega_1 = \{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n; \ldots\}$ и $\Omega_2 = \{y_1; y_2; y_3; \ldots; y_n; \ldots\}$. Для элементов z множества $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ можно использовать такую нумерацию: $z_1 = x_1$; $z_2 = y_1$; $z_3 = x_2$; $z_4 = y_2$; ...; $z_{2n-1} = x_n$; $z_{2n} = y_n$; ... . Таким образом, все элементы множества Ω оказываются занумерованными. Это означает, что это множество счетно.

4. Пусть $x \in [a, b]$. Поставим ему в соответствие $y = \dfrac{(d-c)}{(b-a)}(x-a) + c$. Это соответствие взаимно однозначно, поскольку x однозначно выражается через y: $x = \dfrac{(b-a)}{(d-c)}(y-c) + a$. Если $x \in [a, b]$, т.е. $a \le x \le b$, то для y получается неравенство $a \le \dfrac{(b-a)}{(d-c)}(y-c) + a \le b$. Используя левую часть неравенства, получим $0 \le (y-c)$ или $y \ge c$. Правая часть неравенства дает $(y-c) \le$ $\le (d-c)$ или $y \le d$. Итак, при любом $x \in [a, b]$ соответствующее значение y принадлежит отрезку $[c, d]$ и, как нетрудно проверить, меняя ролями x и y, наоборот: для любого $y \in [c, d]$ соответствующее ему значение x принадлежит отрезку $[a, b]$. Следовательно, построенное соответствие будет взаимно однозначным соответствием между элементами рассматриваемых множеств. Поэтому их мощности одинаковы.

5. $\sup \Omega = 2$ и $\inf \Omega = -2$.

6. $\sup \Omega = 4$ и $\inf \Omega = 1$.

7. $\sup \Omega = 4{,}5$ и $\inf \Omega = 1$.

8. Имеем: $|y| = \left|\dfrac{x}{1+x^2}\right| = \dfrac{|x|}{1+x^2} = \dfrac{|x|}{1+|x|^2}$. Пусть $|x| \le 1$. Тогда, заменяя в знаменателе $1 + |x|^2$ на 1 (уменьшая знаменатель), получим, что $|y| = \dfrac{|x|}{1+|x|^2} \le \dfrac{|x|}{1} = |x| \le 1$. Пусть теперь $|x| \ge 1$. Тогда, заменяя в знаменателе $1 + |x|^2$ на $|x|^2$ (снова уменьшаем знаменатель), получим, что $|y| = \dfrac{|x|}{1+|x|^2} \le \dfrac{|x|}{1} = |x| \le 1$. Таким образом, при любых x $|y| \le 1$, а это означает, что множество значений функции $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ ограничено.

ГЛАВА 2

1. $C = \begin{pmatrix} -21 & 25 & 41 \\ 11 & 3 & 25 \end{pmatrix}$.

2. $C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -2 \\ 7 & 31 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $|C| = 0$.

4. $|A| = -40$.

5. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & 19 & -34 \\ -19 & -23 & 41 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

6. $\Delta = -12$; $\Delta_x = 60$; $\Delta_y = -72$; $\Delta_z = -108$; $x = -5$; $y = 6$; $z = 9$.

7. $X = 2C_1$; $Y = 4C_1 - 2C_2$; $Z = -8C_1 - 2C_2$; $U = C_1$; $V = C_2$.

8. Система уравнений несовместна (т.е. не имеет решений).

ГЛАВА 3

1. Пары векторов: {**a**, **c**}, {**b**, **d**}, {**a**, **e**}, {**b**, **e**}, {**c**, **e**}, {**d**, **e**}.

2. Векторы компланарны.

3. Да, образуют.

4. **c** = {21; –12; 6}, **d** = {–6; 16; 8}, **e** = {–12; 10; –1}.

5. **AB** = {4; –12; –4}, **AC** = {1; –1; 5}, **CB** = {3; –11; –9}.

6. $S = 306$. Указание: найти длины сторон и воспользоваться формулой Герона.

7. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$.

8. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$.

9. $3x - 2y + 5z - 6 = 0$.

10. $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y+5}{-2} = \dfrac{z-3}{7}$.

11. $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ — гипербола; полуоси: $a = 3$, $b = 4$; фокусы: $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$.

12. а) сфера; б) однополостный гиперболоид; в) конус; г) двуполостный гиперболоид; д) эллипсоид; е) эллиптический параболоид; ж) гиперболический параболоид; з) параболический цилиндр.

ГЛАВА 4

1. Указание: воспользоваться определением предела последовательности, взяв, например, $\varepsilon = 1$.

4. Указание: воспользоваться неравенством $\big||x| + |y|\big| \le |x - y|$.

6. $\dfrac{1}{2}$, 0, 1, $+\infty$.

ГЛАВА 5

4. Указание: воспользоваться теоремой 4.2 (о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную).

6. Указание: воспользоваться результатом задачи 4 (см. гл. 4).

7. 2, $\dfrac{4}{3}$, π, $-\dfrac{1}{2}$.

ГЛАВА 6

4. Неверно. Указание: рассмотреть функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } x\in(0,1); \\ -1 & \text{при } x\in(-1,0). \end{cases}$$

6. $3(x-1)^4+17(x-1)^3+32(x-1)^2+28(x-1)+3$. Указание: использовать формулу Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

9. 1) $y=x$ — наклонная асимптота, $y=\pm1$ — вертикальные асимптоты; 2) $y=x+2$ — наклонная асимптота, $y=-2$ — вертикальная асимптота. 3) $y=\pm\dfrac{\pi}{2}x-1$ — наклонные асимптоты (при $x\to\pm\infty$).
Указание: в последнем случае использовать пример 5.11.

ГЛАВА 7

1. Указание: воспользоваться формулами

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ \ \operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}.$$

2. Указание: сделать замену $t=ax+b$ (см. также пример 7.6).

3. Очевидно, при замене $u=$ ответ получится формула

$$\int f(x)\,dx=\int du$$

и дело сводится к табличному интегралу

$$\int du=u+C.$$

4. Указание: использовать теорему 7.1 (о «почти единственности» первообразной).

5. $F'(x)=2xe^{-x^4}$. Указание: использовать теорему 7.3 и правило дифференцирования сложной функции (см. теорему 6.3).

8. 1) $\dfrac{1}{6}$; 2) $\dfrac{32}{3}$.

9. 1) $\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$; 2) $2\operatorname{sh}1$; 3) 8.

10. 1) сходится; 2) расходится; 3) сходится; 4) сходится; 5) расходится; 6) расходится.

ГЛАВА 8

3. $P=(x-1)^2-(x-1)(y+1)+(y+1)^2+2(x\text{-}1)-2(y+1)+3$.
Указание: воспользоваться формулой Тейлора в точке $x_0=1$, $y_0=-1$.

4. $x=0$, $y=0$ — точка минимума.

5. Наибольшее значение достигается в точке $x=1$, $y=0$ и равно -2. Наименьшее значение достигается в точке $x=0$, $y=1$ и равно -5.

ГЛАВА 9

1. Указание: воспользоваться теоремой 9.5 и геометрическим смыслом одномерного интеграла (см. п. 7.3).

2. $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_0^x f(x,y)dy \right\} dx = \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_y^1 f(x,y)dx \right\} dy.$

3. Указание: использовать теорему о среднем для двойного интеграла.

4. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{e}\right)$; 3) $\frac{\pi}{4}(e^4 - e)$. Указание: перейти к полярным координатам и использовать пример 7.18.

6. 1) $m = 4$; 2) $x_0 = \frac{20}{7}$, $y_0 = \frac{14}{3}$.

ГЛАВА 10

1. Ряд расходится ($S = +\infty$).

2. Ряд сходится.

3. Ряд сходится.

4. Ряд сходится.

5. Ряд расходится.

6. Указание: монотонность убывания модулей членов ряда вытекает из следующего неравенства: $\sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3^{n+1}}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3^{n+1}}\right) > 0.$

7. $\Omega = \{x \mid -6 < x \le 8\}$.

8. $S(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$.

9. $\sin 3x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$

10. $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx \approx \sum\limits_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!}$, ошибка (абсолютная погрешность) $\varepsilon < \frac{1}{(2N+3)(N+1)!}$.

ГЛАВА 11

1. $y + C_1xy - 1 = 0$.

2. $y = x e^{1+C_1x}$.

3. $y = C_1 e^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$.

4. $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2$.

5. $y = C_1e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}$.

6. $y = \frac{4}{(x+4)^2}$.

7. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

8. $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

9. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$.

10. $y = e^{x} + x^2$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -24.$$

Замечание. Метод вычисления определителей, проиллюстрированный приведенным примером, называется *методом Гаусса*. Существуют и другие методы, основанные на использовании рассмотренных выше свойств определителя. Некоторые из них могут оказаться более эффективными, чем метод Гаусса, в каких-то частных случаях. Но в отличие от них метод Гаусса универсален и, будучи несколько модифицирован, дает хорошие результаты. Поэтому он находит широкое применение в вычислительной практике.

Рассмотрим еще один пример, который окажется полезным в дальнейшем.

Пример 2.11. Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, расположенные либо выше, либо ниже главной диагонали, равны нулю. Вычислим определитель такой матрицы. Имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разложив этот определитель по первому столбцу, получим

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Далее, разложив определитель $(n-1)$-го порядка по первому столбцу, получим

$$|A| = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4(n-1)} & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжая эти действия, в итоге получим

$$|A| = a_{11}a_{22}\dots a_{(n-1)(n-1)}a_{nn},$$

т.е. определитель треугольной матрицы равен произведению элементов матрицы, стоящих на главной диагонали. Или еще говорят так: определитель равен произведению диагональных элементов. Если матрица такова, что все ее элементы, стоящие выше главной диагонали, равны нулю, то транспонирование матрицы приводит этот случай к рассмотренному выше.

Еще одно свойство определителя, которое важно отметить, по содержанию близко к свойству 11. Предположим, что в матрице определителя какую-либо строку, например строку с номером i, заменили другой строкой с номером j. Тогда в матрице нового определителя будут две одинаковые строки. В этом случае, согласно свойству 3, определитель будет равен нулю. Разложив его по i-й строке, получим равенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{ik} = 0,$$

которое составляет содержание очередного свойства определителя.

Свойство 12. Сумма произведений элементов строки матрицы определителя на алгебраические дополнения к элементам другой строки равна нулю. Аналогичный результат верен и для столбцов.

Свойство 13. Если матрица C является произведением двух квадратных матриц A и B, то ее определитель равен произведению определителей этих матриц, т.е., если $C = AB$, то $|C| = |A||B|$.

Доказательство этого свойства несколько громоздко и поэтому здесь не приводится.

2.3. Обратная матрица

Для дальнейшего потребуется такое понятие, как присоединенная матрица.

Определение 2.8. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Матрица A^*, получающаяся из матрицы A заменой всех ее элементов на алгебраические дополнения к этим элементам, называется *присоединенной матрицей* по отношению к матрице A.

Таким образом, $A^* = \|A_{ij}\|$, где A_{ij} — алгебраические дополнения к соответствующим элементам a_{ij} матрицы A.

Определение 2.9. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если $|A|$ не равен нулю. В противном случае матрица называется *вырожденной*.

Определение 2.10. Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к квадратной матрице A, если и только если выполняются равенства $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, где E — единичная матрица.

Теорема 2.1. Если существует обратная матрица A^{-1}, то она единственна.

Доказательство. Предположим противное, что существует еще одна матрица B такая, что $BA = AB = E$. Тогда, пользуясь тем, что при умножении матриц единичная матрица ведет себя как единица при умножении чисел, получим $B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}$. ▲

Теорема 2.2. Для того чтобы существовала матрица A^{-1} — обратная по отношению к матрице A, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т.е. чтобы $|A| \neq 0$.

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Если A^{-1} существует, то пользуясь свойством 13 (определитель произведения матриц равен произведению их определителей), получим $1 = |E| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$. Из этого равенства следует, что $|A| \neq 0$, иначе справа стояло бы число, равное нулю, а слева — единице. Необходимость условия $|A| \neq 0$ доказана.

Для доказательства достаточности условия $|A| \neq 0$ для существования обратной матрицы произведем умножение матрицы A на матрицу $(A^*)^{\mathrm{T}}$, где

матрица A^* — присоединенная по отношению к A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть $i \neq j$, тогда $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0$, в силу свойства 12 определителя. Если же $i = j$, то $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = |A|$, согласно формуле (2.1). Таким образом, матрица $C = \|c_{ij}\|$ имеет *диагональный* вид:

$$C = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix},$$

т.е. все элементы матрицы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю. Нетрудно проверить, что умножение матриц $(A^*)^{\mathrm{T}}$ и A в другом порядке также дает диагональную матрицу C. Следовательно, если матрицу $(A^*)^{\mathrm{T}}$ умножить на число $\frac{1}{|A|}$, то будут справедливыми равенства:

$$\left(\frac{1}{|A|}(A^*)^{\mathrm{T}}\right)A = A\left(\frac{1}{|A|}(A^*)^{\mathrm{T}}\right) = E.$$

Это означает, что матрица $\left(\frac{1}{|A|}(A^*)^{\mathrm{T}}\right)$ является обратной по отношению к матрице A. Таким образом доказана и достаточность. ▲

Замечание. При доказательстве достаточности условия $|A| \neq 0$ было не только доказано существование обратной матрицы, но и фактически указан способ ее построения. Этот способ называется *методом присоединенной матрицы*.

Пример 2.12. Найдем указанным способом обратную матрицу к матрице A:

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 13 & 12 \\ 41 & 40 & 41 \\ 28 & 27 & 27 \end{pmatrix}.$$

Сначала вычисляем определитель матрицы A. Имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} 14 & 13 & 12 \\ 41 & 40 & 41 \\ 28 & 27 & 27 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из третьей строки первую, умноженную на 2, а из второй — первую, умноженную на 3. Получим

$$|A| = \begin{vmatrix} 14 & 13 & 12 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Теперь к первой строке прибавим вторую, умноженную на 14. Получим

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 27 & 82 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложив определитель по первому столбцу, найдем

$$|A| = (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 27 & 82 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27 & 82 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Второй этап — это вычисление элементов присоединенной матрицы. Имеем

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 40 & 41 \\ 27 & 27 \end{vmatrix} = 27\begin{vmatrix} 40 & 41 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 27(40 - 41) = -27;$$

$$A_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 41 & 41 \\ 28 & 27 \end{vmatrix} = 41\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 28 & 27 \end{vmatrix} = 41(27 - 28) = -41;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 41 & 40 \\ 28 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 27 \end{vmatrix} = (27 - 40) = -13;$$

$$A_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 13 & 12 \\ 27 & 27 \end{vmatrix} = -27\begin{vmatrix} 13 & 12 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -27(13 - 12) = -27;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 28 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 27 \end{vmatrix} = (54 - 12) = 42;$$

$$A_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 14 & 13 \\ 28 & 27 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 1 & 27 \end{vmatrix} = -(27 - 13) = -14;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 13 & 12 \\ 40 & 41 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ -1 & 41 \end{vmatrix} = (41 + 12) = 53;$$

$$A_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 41 & 41 \end{vmatrix} = -41\begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -41(14 - 12) = -82;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 14 & 13 \\ 41 & 40 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 1 & 40 \end{vmatrix} = (40 - 13) = 27.$$

Определители второго порядка были вычислены путем предварительного вычитания второго столбца из первого.

Таким образом, присоединенная матрица имеет вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} -27 & 41 & -13 \\ -27 & 42 & -14 \\ 53 & -82 & 27 \end{pmatrix}.$$

Разделив ее элементы на $|A| = -1$ и произведя транспонирование, находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 27 & 27 & -53 \\ -41 & -42 & 82 \\ 13 & 14 & -27 \end{pmatrix}.$$

2.4. Системы линейных алгебраических уравнений

2.4.1. Основные понятия

Системами линейных алгебраических уравнений называются системы уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

где x_1, x_2, ..., x_n — неизвестные величины, а числа a_{ij} и b_i, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ заданы. Матрица $A = \|a_{ij}\|$ называется *матрицей системы* (2.2), а матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

— матрицей правых частей системы (2.2). В примере 2.4 (см. 2.1) было показано, что если ввести в рассмотрение матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

то матричное уравнение $AX = B$ оказывается эквивалентным системе (2.2).

Определение 2.11. Система (2.2) называется *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение, и *несовместной*, если решений нет.

Простейшие примеры показывают, что существуют как совместные, так и несовместные системы линейных уравнений.

Пример 2.13. Система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

совместна, поскольку у нее есть решение: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Пример 2.14. Система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

несовместна, так как не существует таких чисел x_1 и x_2, которые в сумме давали бы одновременно и 0, и 1.

2.4.2. Правило Крамера

Рассмотрим частный случай системы (2.2): систему, у которой число уравнений m равно числу неизвестных n. Тогда матрица системы A будет квадратной. Пусть определитель этой матрицы, называемый *определителем системы*, отличен от нуля. Покажем, что такая система всегда совместна, какие бы правые части у нее ни были. А именно, докажем следующую теорему.

Теорема 2.3. Если $|A| \neq 0$, $(A = \|a_{ij}\|)$, то система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.3}$$

при любых значениях b_1, b_2, ..., b_n совместна, и ее решение единственно.

Это решение может быть найдено по *правилу Крамера*:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $\Delta = |A|$; а Δ_i равно определителю, который получается после замены в матрице A i-го столбца столбцом из правых частей

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Поскольку $|A| \neq 0$, то у матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Умножим матричное уравнение $AX = B$ слева на матрицу A^{-1}. Получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$, или $EX = A^{-1}B$, или $X = A^{-1}B$. Это равенство показывает, что если решение X существует, то оно обязано быть равным $A^{-1}B$. Следовательно, решение X единственно. С другой стороны, подстановка $X = A^{-1}B$ в матричное уравнение обращает его в тождество. Значит, $X = A^{-1}B$ является решением, т.е. матричное уравнение имеет решение. Поэтому система (2.3), эквивалентная матричному уравнению $AX = B$, также имеет решение и оно единственно. Пользуясь выражением A^{-1} через присоединенную матрицу, столбец из неизвестных x_1, x_2, ..., x_n, с использованием формулы $X = A^{-1}B$, можно представить в следующем виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + A_{3i}b_3 + \ldots + A_{ni}b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + A_{3n}b_3 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Теперь, если определитель Δ_i разложить по i-му столбцу, то получится i-я строка этой матрицы. Действительно, имеем

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + A_{3i}b_3 + \ldots + A_{ni}b_n.$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \ldots \\ \Delta_n \end{pmatrix},$$

или $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. ▲

Пример 2.15. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -11; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0; \\ \ x_1 - \ x_2 + 6x_3 = 1, \end{cases}$$

которую требуется решить, используя правило Крамера.

Решение. Чтобы применить правило Крамера, сначала следует вычислить определитель системы и убедиться в том, что он отличен от нуля. Имеем

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 54 + 10 - 2 - 3 + 24 - 15 = 68 \neq 0.$$

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Понятие множества. Операции над множествами

Многие фундаментальные понятия в математике базируются на наших интуитивных представлениях об объектах и их свойствах. Одним из таких фундаментальных понятий является понятие множества. Множество нельзя определить через какие-то уже известные понятия, это возможно только благодаря интуитивным, т.е. полученным из опыта, представлениям. Слово «множество» используется и в быту. Соответствующее ему математическое понятие по смыслу почти ничем не отличается от «бытового» понятия. Действительно, при рассмотрении нескольких объектов, объединяемых по какому-то признаку, употребляется слово «множество». Например, множество студентов в группе; множество автомобилей, выпущенных заводом за год; множество грибов в данном лесу. Эти примеры показывают, что в одних случаях множество может быть легко охарактеризовано некоторым числом, а в других — это сделать значительно труднее, хотя, в принципе, — всегда возможно. Но встречаются такие множества, для которых возможность «пересчета» всех их элементов неочевидна. Например, множество целых простых чисел. Оказывается, что элементы этого множества нельзя сосчитать, т.е. охарактеризовать каким-либо числом. Если начать этот пересчет, то он никогда не закончится. Существует прием, позволяющий набор из любого конечного числа простых чисел увеличить еще на единицу. Поэтому никакое число не годится для того, чтобы охарактеризовать множество простых чисел. Их количество бесконечно.

Множество, состоящее из некоторого натурального числа элементов, называется *конечным* множеством. Если не существует такого числа, определяющего количество элементов в множестве, то такое множество называется *бесконечным*. Так, множество автомобилей, выпущенных заводом, — конечное множество, а множество всех простых чисел — бесконечное множество.

К числу множеств оказывается удобным отнести и *пустое* множество, т.е. множество, не содержащее ни одного элемента. Его роль аналогична роли нуля в арифметике чисел.

Затем вычисляются определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -198 + 10 + 0 - 3 - 0 + 55 = -136;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -11 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 55 + 2 - 0 + 132 + 15 = 204;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -11 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 0 + 22 + 33 + 4 + 0 = 68.$$

В итоге имеем:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{136}{68} = -2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{204}{68} = 3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{68}{68} = 1.$$

Замечание. Доказанная теорема дает достаточное условие совместности системы. Это условие не является необходимым. Равенство определителя системы нулю не означает, что система несовместна. Бывают системы, которые совместны несмотря на то, что их определитель равен нулю.

Пример 2.16. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$$

Ее определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

но она имеет решение, например $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Пример несовместной системы с определителем, равным нулю, был приведен выше (см. пример 2.14). Таким образом, если определитель системы равен нулю, то про совместность системы ничего сказать нельзя, требуется дополнительное исследование этого вопроса.

2.4.3. Метод Гаусса исследования и решения систем линейных уравнений

Переходим к рассмотрению систем линейных алгебраических уравнений общего вида, когда число уравнений, вообще говоря, не равно числу неизвестных.

Напомним одно определение, известное из курса математики средней школы.

Определение 2.12. Две системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *эквивалентными* тогда и только тогда, когда любое решение первой системы является решением второй и, наоборот, любое решение второй системы является решением первой.

В случае, когда не применимо правило Крамера, оказывается целесообразным преобразование системы к некоторому специальному виду. При этом преобразованная система оказывается эквивалентной исходной. Основанием для преобразований системы служит следующая теорема.

Теорема 2.4. Если в системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

к одному из уравнений прибавить другое, умноженное на любое число, то полученная таким образом новая система будет эквивалентна исходной.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — решение исходной системы. Это означает, что все уравнения системы при подстановке в них этих чисел обращаются в тождества. При умножении тождества (его левой и правой части) на число оно остается тождеством. При сложении двух тождеств также получается тождество. Поэтому числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ будут удовлетворять всем уравнениям новой системы, поскольку преобразованное уравнение, в силу сказанного выше, при подстановке в него этих чисел также будет тождеством. Следовательно, любое решение исходной системы является решением преобразованной. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что последняя может быть получена из преобразованной с помощью тех же операций: надо умножить ранее прибавленное уравнение на то же самое число, но со знаком минус, и снова прибавить его к преобразованному ранее уравнению. В итоге последнее уравнение превратится в исходное, как и вся система. Следовательно, и к исходной системе применимы использованные выше доводы, что позволяет сделать вывод о том, что любое решение преобразованной системы является решением исходной. Если исходная система несовместна, то будет несовместной и преобразованная система, как это следует из последнего рассуждения. ▲

Доказанная теорема дает возможность преобразовать исходную систему таким образом, чтобы вопрос о ее совместности легко разрешался и просто находились сами решения. Заметим только, что в число действий по преобразованию системы можно включить такие, как перестановка уравнений и перенумерация неизвестных. Эти действия также приводят к системе, которая будет эквивалентна исходной. Например, очевидно, что системы

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ \quad\;\; y+z=2 \\ \qquad\quad z=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z=1 \\ z+y=2 \\ z+y+x=3 \end{cases}$$

эквивалентны.

Рассмотрим случай, когда преобразованная система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $a_{11} \neq 0$; $a_{22} \neq 0$; ...; $a_{nn} \neq 0$. Решение этой системы легко находится.

Действительно, из последнего уравнения сразу получается:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

В предпоследнем уравнении неизвестным остается только x_{n-1}, которое также сразу находится:

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{(n-1)n}x_n\right).$$

Далее, переходя к предыдущему уравнению, имеем ту же ситуацию: все неизвестные кроме одного уже найдены, а коэффициент при ненайденном x_{n-2} отличен от нуля. Поэтому x_{n-2} находится по аналогичной формуле:

$$x_{n-2} = \frac{1}{a_{(n-2)(n-2)}}\left(b_{n-2} - a_{(n-2)(n-1)}x_{n-1} - a_{(n-2)n}x_n\right).$$

Таким образом, все неизвестные x_1, x_2, ..., x_n однозначно определяются. Система оказалась однозначно разрешимой (решение существует и оно единственно).

Возможен случай, когда преобразованная система имеет следующую, так называемую *верхнюю трапециевидную* форму:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1(r+1)}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + a_{2(r+1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{rr}x_r + a_{r(r+1)}x_{r+1} + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $a_{11} \neq 0$; $a_{22} \neq 0$; ...; $a_{rr} \neq 0$.

Систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n + b_1; \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n + b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r = -a_{r(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{nn}x_n + b_n. \end{cases} \tag{2.6}$$

Неизвестные x_1, x_2, ..., x_r называются *базисными*, а x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n — *свободными*. После такого преобразования системы видно, что она совместна и решений у нее бесконечно много. Действительно, какие бы значения ни были даны свободным неизвестным x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n, базисные неизвестные x_1, x_2, ..., x_r однозначно находятся, поскольку относительно них система имеет форму, к которой применимо правило Крамера:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(r-1)} & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2(r-1)} & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)r} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{rr} \neq 0.$$

В этом случае, как известно, решение x_1, x_2, ..., x_r существует и единственно.

Таким образом, давая различные произвольные значения свободным неизвестным x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n и однозначно находя значения соответствующих базисных неизвестных x_1, x_2, ..., x_r, можно убедиться, что решений у преобразованной системы бесконечно много. Выражение базисных неизвестных через свободные можно получить с помощью того же правила Крамера. Обозначая величину определителя матрицы при базисных неизвестных через Δ, получим

$$\Delta = a_{11}a_{22}\ldots a_{rr} \neq 0,$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(i-1)} & d_1 & a_{1(i+1)} & \ldots & a_{1(r-1)} & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2(i-1)} & d_2 & a_{2(i+1)} & \ldots & a_{2(r-1)} & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{(i-1)(i-1)} & d_{i-1} & a_{(i-1)(i+1)} & \ldots & a_{(i-1)(r-1)} & a_{(i-1)r} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & d_i & a_{i(i+1)} & \ldots & a_{i(r-1)} & a_{ir} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & d_{i+1} & a_{(i+1)(i+1)} & \ldots & a_{(i+1)(r-1)} & a_{(i+1)r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & d_r & 0 & \ldots & 0 & a_{rr} \end{vmatrix},$$

где $d_j = -a_{j(r+1)}x_{r+1} - a_{j(r+2)}x_{r+2} - \ldots - a_{jn}x_n + b_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Записывая i-й столбец в развернутом виде, получим

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{1(r+1)}x_{r+1} & -a_{1(r+2)}x_{r+2} - & \dots & -a_{1n}x_n + & b_1 \\ -a_{2(r+1)}x_{r+1} & -a_{2(r+2)}x_{r+2} - & \dots & -a_{2n}x_n + & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{r(r+1)}x_{r+1} & -a_{r(r+2)}x_{r+2} - & \dots & -a_{rn}x_n + & b_r \end{pmatrix},$$

откуда видно, что он представляет собой сумму $(n - r + 1)$ столбцов. Используя свойство 7 определителя, можно разложить Δ_i в сумму таких определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & -a_{1(r+k)}x_{r+k} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(i-1)} & -a_{2(r+k)}x_{r+k} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(i-1)(i-1)} & -a_{(i-1)(r+k)}x_{r+k} & a_{(i-1)(i+1)} & \dots & a_{(i-1)(r-1)} & a_{(i-1)r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{i(r+k)}x_{r+k} & a_{i(i+1)} & \dots & a_{i(r-1)} & a_{ir} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{(i+1)(r+k)}x_{r+k} & a_{(i+1)(i+1)} & \dots & a_{(i+1)(r-1)} & a_{(i+1)r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{r(r+k)}x_{r+k} & 0 & \dots & 0 & a_{rr} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & -a_{1(r+k)} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(i-1)} & -a_{2(r+k)} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(i-1)(i-1)} & -a_{(i-1)(r+k)} & a_{(i-1)(i+1)} & \dots & a_{(i-1)(r-1)} & a_{(i-1)r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{i(r+k)} & a_{i(i+1)} & \dots & a_{i(r-1)} & a_{ir} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{(i+1)(r+k)} & a_{(i+1)(i+1)} & \dots & a_{(i+1)(r-1)} & a_{(i+1)r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{r(r+k)} & 0 & \dots & 0 & a_{rr} \end{vmatrix} x_{r+k} =$$

$$= \Delta_{ik}x_{r+k},$$

где $k = 1, 2, \dots, n - r$, и еще одного

$$\Delta_{i0} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(i-1)(i-1)} & b_{i-1} & a_{(i-1)(i+1)} & \dots & a_{(i-1)(r-1)} & a_{(i-1)r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_i & a_{i(i+1)} & \dots & a_{i(r-1)} & a_{ir} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{i+1} & a_{(i+1)(i+1)} & \dots & a_{(i+1)(r-1)} & a_{(i+1)r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_r & 0 & \dots & 0 & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\Delta_{i1}}{\Delta} x_{r+1} + \frac{\Delta_{i2}}{\Delta} x_{r+2} + \ldots + \frac{\Delta_{i(n-r)}}{\Delta} x_n + \frac{\Delta_{i0}}{\Delta},$$

где $i = 1, 2, \ldots, r$ дают выражение базисных неизвестных через свободные неизвестные. Задавая значения свободных неизвестных $x_{r+1} = c_1$, $x_{r+2} = c_2$, ..., $x_n = c_{n-r}$ и вычисляя по полученным формулам базисные неизвестные:

$$x_i = \frac{\Delta_{i1}}{\Delta} c_1 + \frac{\Delta_{i2}}{\Delta} c_2 + \ldots + \frac{\Delta_{i(n-r)}}{\Delta} c_{n-k} + \frac{\Delta_{i0}}{\Delta},\ i = 1, 2, \ldots, r$$

получим решение системы. Запишем это решение в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \ldots \\ \alpha_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \ldots \\ \alpha_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + c_{n-r} \begin{pmatrix} \alpha_{1(n-r)} \\ \alpha_{2(n-r)} \\ \ldots \\ \alpha_{r(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \ldots \\ \alpha_{r0} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Здесь обозначены $\alpha_{st} = \dfrac{\Delta_{st}}{\Delta}$, $s = 1, 2, \ldots, r$; $t = 0, 1, \ldots, (n - r)$. Теперь, какие бы числа $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ мы ни подставляли в эти формулы, всякий раз будет получаться решение системы. Возникает естественный вопрос: все ли решения системы охвачены этими формулами? Утвердительный ответ получается следующим образом: если $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — какое-либо решение системы, то положив $c_1 = \beta_{r+1}$, $c_2 = \beta_{r+2}$, ..., $c_{n-r} = \beta_n$, получим, что $x_1 = \beta_1$, $x_2 = \beta_2$, ..., $x_r = \beta_r$. В противном случае система (2.6) при одинаковых значениях правых частей уравнений имеет два различных решения, что невозможно в силу теоремы о правиле Крамера.

Таким образом, полученные выше формулы при любых значениях чисел $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ дают решение системы, и любое решение системы может быть получено по этим формулам за счет соответствующего выбора этих чисел, т.е. формулы позволяют найти *общее решение* системы (2.5).

Замечание. Если система такова, что все правые части в ее уравнениях равны нулю, то система называется *однородной*. Система (2.5), у которой правые части заменены нулями, является однородной, соответствующей исходной неоднородной системе. Она имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1(r+1)}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + a_{2(r+1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r + a_{r(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Поскольку столбец правых частей состоит из нулей, то определитель $\Delta_{i0} = 0$ для $i = 1, 2, ..., r$. Это обстоятельство приводит к тому, что общее решение однородной системы будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \ldots \\ \alpha_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \ldots \\ \alpha_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + c_{n-r} \begin{pmatrix} \alpha_{1(n-r)} \\ \alpha_{2(n-r)} \\ \ldots \\ \alpha_{r(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку числа c_1, c_2, ..., c_{n-r} произвольны, то выбрав $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, ..., $c_{n-r} = 0$, получим, что первый столбец дает решение однородной системы; при $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, ..., $c_{n-r} = 0$ — то же, для второго столбца и т. д. Эта система решений

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \ldots \\ \alpha_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \ldots \\ \alpha_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \begin{pmatrix} \alpha_{1(n-r)} \\ \alpha_{2(n-r)} \\ \ldots \\ \alpha_{r(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}$$

однородной системы называется *фундаментальной*.

Если система не является однородной (не все правые части в ее уравнениях равны нулю), то, положив в формулах (2.7) $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, ..., $c_{n-r} = 0$, получим, что столбец

$$\begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \ldots \\ \alpha_{r0} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

будет давать одно из решений *неоднородной системы.* Поскольку это решение лишь одно из бесконечного множества решений, про него говорят, что оно является *частным решением* неоднородной системы.

Таким образом, общее решение неоднородной системы представляет собой сумму с произвольными числовыми коэффициентами решений, входящих в фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы и еще одного частного решения неоднородной системы. Если система изначально однородна, то в общем решении присутствуют лишь слагаемые из решений, входящие в фундаментальную систему решений.

Теперь рассмотрим еще один вариант преобразованной системы — вариант, когда в процессе преобразования возникают уравнения, не имеющие решений. Это говорит о том, что вся преобразованная система несовместна, а следовательно, несовместной является и исходная система. Ответим на вопрос: какие уравнения не имеют ни одного решения? Одно линейное уравнение всегда имеет решение, если хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля. Поэтому несовместным одно уравнение может быть только тогда, когда коэффициенты при всех неизвестных равны нулю, а правая часть нулю не равна. Например, не существует таких x, y, z, чтобы удовлетворялось уравнение

$$0\,x + 0\,y + 0\,z = 1.$$

Такие уравнения могут возникать в процессе преобразования исходной системы. Например, преобразовывая систему

$$\begin{cases} x + y + z = 1; \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

можно вычесть из первого уравнения второе. При этом появляется уравнение, приведенное выше, которое не имеет ни одного решения. Следовательно, рассматриваемая система несовместна.

Таким образом, возникновение в процессе преобразования исходной системы несовместного уравнения, у которого левая часть всегда равна нулю, а правая — не является нулем, дает основание для вывода: исходная система несовместна.

Перейдем к изложению алгоритма метода Гаусса, который позволяет всегда привести преобразованную систему к одному из рассмотренных выше случаев: либо к виду (2.4), либо к виду (2.5), либо к одному из них с несовместными уравнениями. Приведение произвольной системы к одному из указанных видов позволяет довести до конца и исследование системы на совместность, и ее решение.

Итак, пусть имеется произвольная система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.9}$$

Перестановкой уравнений всегда можно добиться, чтобы коэффициент при x_1 в первом уравнении был отличен от нуля. Поэтому можно считать, что $a_{11} \neq 0$. Найдем числа $\mu_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Вычтем последовательно из второго, третьего, ..., m-го уравнений системы (2.9) первое уравнение, умноженное соответственно на $\mu_{21}, \mu_{31}, \ldots, \mu_{m1}$. В результате этих преобразований во всех уравнениях, кроме первого, неизвестное x_1 исчезнет. Полученная система будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad\qquad a_{22}^1 x_2 + \ldots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{m2}^1 x_2 + \cdots + a_{mn}^1 x_n = b_m^1, \end{cases}$$

где $a_{ij}^1 = a_{ij} - \mu_{i1}a_{1j}$, $b_i^1 = b_i - \mu_{i1}b_1$, $i, j = 2, 3, \ldots, m$.

Далее рассматриваем систему без первого уравнения:

$$\begin{cases} a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + \ldots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1; \\ a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 + \ldots + a_{3n}^1 x_n = b_3^1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m2}^1 x_2 + a_{m3}^1 x_3 + \ldots + a_{mn}^1 x_n = b_m^1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Если в этой системе имеются уравнения, у которых все коэффициенты при неизвестных равны нулю, то в случае, когда соответствующая правая часть не равна нулю, процесс заканчивается выводом: система несовместна.

Если же соответствующая правая часть также равна нулю, то уравнение удовлетворяется при любых значениях неизвестных, и его можно в дальнейшем не учитывать, т.е. просто отбросить.

Может оказаться, что в результате таких действий от системы (2.10) не останется ни одного уравнения. Тогда процесс преобразования также следует считать законченным. Оставшееся первое уравнение всегда имеет вид либо системы (2.4), либо системы (2.5). Если же матрица системы (2.10) не является нулевой, то к системе можно снова применить преобразование, которое было использовано для исходной системы. Для этого, возможно, понадобятся такие действия, как перестановка уравнений и перенумерация неизвестных, для того чтобы обеспечить выполнение условия $a_{22}^1 \neq 0$, необходимого для следующего шага метода Гаусса.

Тем же приемом, что был использован выше, система (2.10) приводится к виду

$$\begin{cases} a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + \ldots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1; \\ \qquad\qquad a_{33}^2 x_3 + \ldots + a_{3n}^2 x_n = b_3^2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{m3}^2 x_3 + \ldots + a_{mn}^2 x_n = b_m^2, \end{cases}$$

а исходная система примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad\qquad a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + \ldots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{33}^2 x_3 + \ldots + a_{3n}^2 x_n = b_3^2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{m3}^2 x_3 + \ldots + a_{mn}^2 x_n = b_m^2. \end{cases}$$

Дальнейшее исследование и преобразование системы продолжается по уже описанной выше схеме. В любом случае система будет преобразована либо к виду (2.4), либо к виду (2.5), либо будет обнаружена ее несовместность.

Число r, характеризующее преобразованную систему [как систему (2.4), так и систему (2.5)] и определяющее структуру ее общего решения, называется *рангом* матрицы $A = \|a_{ij}\|$, т.е. матрицы системы.

Можно доказать, что это число, а следовательно, и структура общего решения, не зависят от способа, которым исходная система была приведена к эквивалентной ей системе вида либо (2.4), либо (2.5).

Вычисление ранга матрицы возможно несколькими способами, но наиболее рационально поступать с матрицей так же, как с уравнениями при применении метода Гаусса.

В результате матрица превратится в матрицу системы вида (2.4) или вида (2.5). Количество ненулевых элементов на главной диагонали преобразованной матрицы и даст ранг исходной матрицы.

Пример 2.17. Найти ранг матрицы A, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множества обычно обозначаются большими латинскими буквами: A, B, C, а их элементы — малыми буквами: a, b, c. Принадлежность элемента данному множеству обозначается так: $a \in A$. Эта запись означает, что a является элементом множества A. Если же a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$. Другие обозначения: $A \subset B$ — все множество A содержится в множестве B (в этом случае говорят, что A является *подмножеством* множества B); $A = B$ — любой элемент множества A является элементом множества B и наоборот, любой элемент множества B является элементом множества A.

Существуют различные способы задания множеств. Кроме описательных способов, которые были упомянуты выше, когда определялись свойства элементов, по которым они объединялись в одно множество, можно, например, перечислить все элементы множества. Например, множество городов, входящих в маршрут «Золотое кольцо России», состоит из Сергиева Посада, Переславля-Залесского, Ростова, Ярославля, Костромы, Суздаля и Владимира. Можно задать множество с помощью следующей записи: $A = \{1, 4, \ldots, n^2, \ldots\}$. Используется также способ, когда указываются свойства элементов с помощью математических символов. Например, $A = \{x: x^2 + 3x - 2 > 0\}$ есть множество всех x, для которых выполняется указанное неравенство.

Наиболее важные операции, которые можно производить с двумя множествами A и B, — объединение двух множеств и построение их пересечения.

Объединение двух множеств — новое множество, состоящее из элементов как множества A, так и множества B. Это множество обозначается через $A \cup B$.

Пересечением двух множеств называется множество, в которое входят только те элементы, которые одновременно принадлежат обоим множествам A и B. Обозначается это множество через $A \cap B$.

Например, пусть $A = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Тогда, поскольку уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $A \cap B = \{1\}$.

Операции объединения и пересечения можно производить с любым конечным числом множеств, а также — и с бесконечным числом. Например, пусть $A_n = \{n\}$, где n — целое положительное число. Тогда множество всех натуральных чисел, обозначаемое обычно через $\mathbf{N}$, будет совпадать с объединением всех множеств A_n для $n = 1, 2, \ldots$. Этот факт можно записать в такой форме:

$$\mathbf{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Когда объединяется конечное число множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, объединение обозначается как $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Аналогично обозначают пересечения множеств: либо $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ — в случае конечного числа «пере-

Решение. Поменяв местами первую и вторую строки, получим

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее первую строку, умноженную на 3, прибавим ко второй строке. Имеем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 13 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Затем первую строку, умноженную на 4, прибавим к третьей строке. Получим

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 13 \\ 0 & 2 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

И наконец, из третьей строки вычитаем вторую и в результате имеем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A преобразована в верхнюю трапециевидную форму. Ее ранг равен 2, так как на главной диагонали находятся только два числа, отличных от нуля.

Для однородных систем оказывается важным вопрос существования для них ненулевых решений. Если такое решение есть, то система называется *нетривиально совместной.* Например, система

$$\begin{cases} x + \ \ y = 0; \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

будет нетривиально совместной потому, что имеет наряду с *тривиальным* решением $x = 0$, $y = 0$ нетривиальные решения $x = c$, $y = -c$, где c — любое число.

В терминах ранга матрицы ответ на поставленный вопрос весьма прост: однородная система нетривиально совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше, чем число неизвестных. В используемых выше обозначениях это условие выглядит так: $r < n$. Обоснование этого факта вытекает из формулы общего решения однородной системы.

Для неоднородных систем важен вопрос их совместности, который также может быть решен в терминах ранга матрицы исходной системы $A = \| a_{ij} \|$ и ранга так называемой *расширенной* матрицы системы $\tilde{A}$, которая получается из матрицы A добавлением одного столбца: столбца из правых частей уравнений системы. При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4 (Кронекера—Капелли). Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы $\tilde{A}$ совпадают.

Доказательство этой теоремы здесь не приводим не столько из-за сложности, сколько из-за ее ограниченной важности. Дело в том, что для проверки выполнения условия теоремы — равенства рангов — требуется вычислить ранги матриц A и $\tilde{A}$, что по трудоемкости эквивалентно исследованию и решению системы методом Гаусса. Отсюда следует, что практическое значение этой теоремы невелико.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 7 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу $C = 3A + 5B$.

2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -1 & 5 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу $C = A - 2B$.

3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 25 & 4 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 8 & -11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу $C = AB$ и ее определитель $|C|$.

4. Вычислите определитель четвертого порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 9 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

5. Найдите матрицу, обратную к матрице A, если

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 13 & 12 & 10 \\ 11 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Решите систему линейных алгебраических уравнений, используя правило Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 6z = 74; \\ 9x + 2y - 3z = -60; \\ 7x + 5y + 3z = 22. \end{cases}$$

7. Методом Гаусса найдите общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - z - 16u = 0; \\ 12x + 4y + 6z + 8u + 20v = 0; \\ 38x + 11y + 23z + 64u + 68v = 0; \\ 4x + y + 3z + 12u + 8v = 0. \end{cases}$$

Примечание. Поскольку фундаментальная система решений определена неоднозначно, то окончательный ответ может не совпасть с ответом, данным в конце книги. Но количество базисных и свободных (параметрических) неизвестных должно совпадать.

8. Методом Гаусса исследуйте на совместность неоднородную линейную систему алгебраических уравнений и в случае наличия совместности найдите общее решение:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 9z - 5u = -17; \\ 9x - 6y - 5z + 3u = -51; \\ 3x + y + 3z + 3u = -8; \\ 4x + 6y + 4z = 18; \\ 7x - 7y - 21z + 35u = 26. \end{cases}$$

ГЛАВА 3
ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

3.1. Геометрические векторы и действия над ними

Если какая-то величина характеризуется только своим числовым значением, то она называется *скалярной* величиной или *скаляром*. Примеры физических скалярных величин: масса тела, температура, потенциал электростатического поля и др. Но среди физических величин можно встретить такие, которые характеризуются не только числовым значением, но и направлением, например, сила, скорость, напряженность электростатического поля. Эти величины называются *векторными* или *векторами*, их можно изображать в виде направленного отрезка прямой, т.е. такого отрезка, на котором указано (обычно стрелкой), где у него начало, а где — конец. При этом длина отрезка равна числовому значению величины (например, величине скорости), а направление отрезка совпадает с направлением вектора (например, направлением скорости).

Оказывается, что все действия с векторными величинами производятся совершенно аналогично тому, как это делается с направленными отрезками. Поэтому достаточно изучить только действия с последними, которые будем называть *геометрическими векторами* (или просто векторами). Они обозначаются буквами полужирного шрифта прямого начертания, например, $\mathbf{a}$. Иногда бывает удобно задавать вектор как упорядоченную пару точек, например, $\mathbf{AB}$. При этом буква, обозначающая начало вектора, ставится первой.

К векторам относят также и *нулевой* вектор. Это такой отрезок, у которого начало и конец совпадают. Обозначать его будем буквой $\boldsymbol{\theta}$. Расстояние от начала до конца вектора называется его *длиной* (или модулем). Длина вектора обозначается $|\mathbf{a}|$ или $|\mathbf{AB}|$. Вектор имеет длину, равную нулю, тогда и только тогда, когда он нулевой.

Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной или на параллельных прямых. Векторы называются *компланарными*, если они расположены на одной или на параллельных плоскостях. Относительно нулевого вектора удобно принять условное соглашение: считать, что он коллинеарен любому вектору.

Определение 3.1. Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

Если геометрически не различать равные векторы, то возникает понятие *свободного вектора* — вектора, который можно перемещать параллельно самому себе, помещая его начало в любую точку. В частности, если имеется несколько векторов, то их всегда можно привести к одному началу, т. е. поместить начала всех векторов в одну точку.

Первое из рассматриваемых действий над векторами — это умножение вектора на число (на скаляр).

Определение 3.2. Произведением вектора $\mathbf{a}$ на число λ называется вектор $\mathbf{b}$, который обозначается $\lambda\mathbf{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\mathbf{b}| = |\lambda||\mathbf{a}|$;

2) вектор $\mathbf{b}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$ (векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны);

3) векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сонаправлены (имеют одинаковое направление), если $\lambda > 0$, и противонаправлены (имеют противоположное направление), если $\lambda < 0$.

Замечание. Если $\lambda = 0$, то из условия 1 следует, что $|\mathbf{b}| = 0$, а это означает, что $\mathbf{b} = \boldsymbol{\theta}$, т. е. является нулевым вектором. Итак, для любого вектора $\mathbf{a}$ имеет место равенство $0\mathbf{a} = \boldsymbol{\theta}$.

Вторая операция над векторами — это сложение векторов.

Определение 3.3. Суммой двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$, который обозначается $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, удовлетворяющий условию: если начало вектора $\mathbf{b}$ перенести в точку, являющуюся концом вектора $\mathbf{a}$, начало вектора $\mathbf{c}$ совпадет с началом вектора $\mathbf{a}$, а конец — с концом вектора $\mathbf{b}$.

Например, если $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$, а $\mathbf{b} = \mathbf{BC}$, то $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{AC}$. Геометрическое построение вектора $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ осуществляется построением треугольника ABC и поэтому называется *правилом треугольника*.

Можно построить вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ другим способом. Поместим начала векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в одну точку A и пусть $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$, а $\mathbf{b} = \mathbf{AD}$. Через точку B проведем прямую, параллельную вектору $\mathbf{b}$, а через точку D — прямую, параллельную вектору $\mathbf{a}$. В получившемся параллелограмме $ABCD$ диагональ AC даст вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Этот способ называется *правилом параллелограмма*.

Нетрудно убедиться в том, что оба способа построения суммы двух векторов эквивалентны.

Действия над геометрическими векторами обладают следующими свойствами, которые могут быть доказаны с помощью определений и теорем элементарной геометрии:

1) для любого вектора $\mathbf{a}$ и любых чисел λ и μ справедливо равенство $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$;

2) если вектор $\mathbf{a} \neq \boldsymbol{\theta}$, то для любого вектора $\mathbf{b}$, коллинеарного вектору $\mathbf{a}$, найдется и притом единственное число λ такое, что $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$;

3) для любых двух векторов справедливо равенство $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;

4) для любых трех векторов справедливо равенство $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;

5) для любых двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и любого числа λ справедливо равенство $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$;

6) для любых двух чисел λ и μ и любого вектора $\mathbf{a}$ справедливо равенство $(\lambda + \mu)\,\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$;

7) для любого вектора $\mathbf{a}$ справедливо равенство $\mathbf{a} + \theta = \mathbf{a}$.

Для дальнейшего введем такое понятие, как *базис*. Если рассматривать геометрические векторы на прямой, т.е. множество векторов, начала и концы которых находятся на одной и той же прямой, то базисом здесь назовем любой ненулевой вектор $\mathbf{e}$, принадлежащий этому множеству. Как следует из свойства 2, любой вектор $\mathbf{x}$ из этого множества единственным образом представим в виде $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{e}$. В этом случае говорят, что вектор $\mathbf{x}$ линейно выражается через вектор $\mathbf{e}$. Число λ называется *координатой* вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}$.

Если рассмотреть множество векторов на плоскости, т.е. множество таких векторов, которые параллельны некоторой фиксированной плоскости, то базисом здесь назовем любые два неколлинеарных вектора $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$, взятых в фиксированном порядке. Покажем, что и в этом случае базис обладает свойством, аналогичным случаю векторов на прямой: любой вектор $\mathbf{x}$ из этого множества единственным образом представим в виде $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{e} + \mu\mathbf{f}$. В этом случае также говорят, что вектор $\mathbf{x}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$.

Для доказательства заметим, что ни один из векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ не может быть нулевым вектором (иначе векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ будут коллинеарными). Случай, когда вектор $\mathbf{x}$ коллинеарен одному из векторов $\mathbf{e}$ или $\mathbf{f}$, сводится к свойству 2. Пусть теперь вектор $\mathbf{x}$ не коллинеарен ни одному из векторов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$. Поместим начала всех трех векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ в одну точку O. Конец вектора $\mathbf{x}$ обозначим буквой A, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{OA}$. Через точки O и A проведем прямые, параллельные векторам $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$, которые пересекутся соответственно в точках B и C. Векторы $\mathbf{OB}$ и $\mathbf{OC}$ по правилу параллелограмма в сумме дадут вектор $\mathbf{x}$. С другой стороны, векторы $\mathbf{OB}$ и $\mathbf{OC}$ коллинеарны векторам $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ соответственно и согласно свойству 2 найдутся единственные числа λ и μ такие, что $\mathbf{OB} = \lambda\mathbf{e}$ и $\mathbf{OC} = \mu\mathbf{f}$. Следовательно, $\mathbf{x} = \mathbf{OB} + \mathbf{OC} = \lambda\mathbf{e} + \mu\mathbf{f}$. ▲

Аналогично можно рассмотреть случай векторов в пространстве (векторы не подчинены никаким условиям). В этом случае базисом назовем любые три некомпланарных вектора $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$, взятых в фиксированном порядке.

Справедливо аналогичное случаю векторов на прямой и на плоскости утверждение: любой вектор $\mathbf{x}$ единственным образом представим в виде $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{e} + \mu\mathbf{f} + \nu\mathbf{g}$. В этом случае также говорят, что вектор $\mathbf{x}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$, а числа λ, μ и ν называются координатами вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$. Доказывается это свойство таким же способом, как и в случае плоскости: делается аналогичное построение в пространстве. При этом оказывается, что сумма трех векторов, начала которых помещены в одну общую точку O, является диагональю параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Введение базиса позволяет производить действия над векторами аналитически, сводя геометрические построения к вычислениям. Это возможно на основе следующих утверждений.

Утверждение 3.1. Пусть $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ — базис в пространстве и числа λ, μ, ν — координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе. При умножении вектора $\mathbf{x}$ на число α его координаты умножаются на это число.

Доказательство. Имеем: $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{e} + \mu\mathbf{f} + \nu\mathbf{g}$. Тогда $\alpha\mathbf{x} = \alpha(\lambda\mathbf{e} + \mu\mathbf{f} + \nu\mathbf{g}) = (\alpha\lambda)\mathbf{e} + (\alpha\mu)\mathbf{f} + (\alpha\nu)\mathbf{g}$. ▲

Утверждение 3.2. Пусть $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ — базис в пространстве и числа λ, μ, ν — координаты вектора $\mathbf{x}$, а $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}$ — координаты вектора $\mathbf{y}$ в этом базисе. При сложении двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ координаты вектора $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ равны суммам соответствующих координат векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Доказательство. Имеем: $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{e} + \mu\mathbf{f} + \nu\mathbf{g}$, $\mathbf{y} = \tilde{\lambda}\mathbf{e} + \tilde{\mu}\mathbf{f} + \tilde{\nu}\mathbf{g}$.

Тогда $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = \lambda\mathbf{e} + \mu\mathbf{f} + \nu\mathbf{g} + \tilde{\lambda}\mathbf{e} + \tilde{\mu}\mathbf{f} + \tilde{\nu}\mathbf{g} = (\lambda + \tilde{\lambda})\mathbf{e} + (\mu + \tilde{\mu})\mathbf{f} + (\nu + \tilde{\nu})\mathbf{g}$. ▲

Утверждение 3.3. Два ненулевых вектора, имеющих разложение по базису $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$: $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{e} + \mu\mathbf{f} + \nu\mathbf{g}$, $\mathbf{y} = \tilde{\lambda}\mathbf{e} + \tilde{\mu}\mathbf{f} + \tilde{\nu}\mathbf{g}$, коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т.е. найдется число t такое, что $\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} = \frac{\mu}{\tilde{\mu}} = \frac{\nu}{\tilde{\nu}} = t$, где система равенств понимается в расширенном смысле: если знаменатель дроби равен нулю, то обязательно равен нулю и числитель.

Доказательство. Пусть ненулевые векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ коллинеарны. В силу свойства 2, найдется число t такое, что $\mathbf{x} = t\mathbf{y}$. Равенство двух векторов влечет равенство их координат $\lambda = t\tilde{\lambda}$, $\mu = t\tilde{\mu}$, $\nu = t\tilde{\nu}$, откуда следуют равенства $\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} = \frac{\mu}{\tilde{\mu}} = \frac{\nu}{\tilde{\nu}} = t$. Обратно, если эта система равенств выполняется, то $\lambda = t\tilde{\lambda}$, $\mu = t\tilde{\mu}$, $\nu = t\tilde{\nu}$, откуда следует, что $\mathbf{x} = t\mathbf{y}$. По определению умножения вектора на число получаем, что векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ коллинеарны. ▲

Замечание. Если один из векторов, например, $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$, то все его координаты равны нулю, и поэтому для любого вектора $\mathbf{y}$ будут иметь место равенства $\lambda = t\tilde{\lambda}$, $\mu = t\tilde{\mu}$, $\nu = t\tilde{\nu}$, где $t = 0$. Поэтому случай нулевого вектора (с учетом соглашения: нулевой вектор коллинеарен любому вектору) включается как частный случай в утверждение 3.3.

3.2. Системы координат на прямой, на плоскости и в пространстве

Определение 3.4. Системой координат на прямой называется совокупность фиксированной точки O и фиксированного ненулевого вектора $\mathbf{e}$, принадлежащих этой прямой.

Точка O называется *началом координат*, а вектор $\mathbf{e}$ образует базис на этой прямой. Если точка M лежит на этой прямой, то можно рассмотреть вектор $\mathbf{OM}$. Он называется *радиусом-вектором* точки M.

Определение 3.5. Координатой точки M на прямой называется координата радиуса-вектора этой точки $\mathbf{OM}$ в базисе $\mathbf{e}$.

Таким образом, каждая точка прямой имеет свою координату, т.е. между всеми точками прямой и числовой осью установлено взаимно однозначное соответствие. Это имеют в виду, когда говорят, что прямая превращается в ось.

Обычно вектор $\mathbf{e}$ выбирают таким, чтобы $|\mathbf{e}| = \mathbf{1}$. Тогда координата точки по модулю всегда равна расстоянию от этой точки до начала координат.

Определение 3.6. Системой координат на плоскости называется совокупность фиксированной точки плоскости O и фиксированного базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ на этой плоскости.

Точка O называется *началом координат*. Если точка M принадлежит этой плоскости, то вектор $\mathbf{OM}$ называется *радиусом-вектором* этой точки.

Определение 3.7. Координатами точки M на плоскости называются координаты радиуса-вектора этой точки $\mathbf{OM}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Таким образом, каждой точке плоскости M поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел: координаты вектора $\mathbf{OM}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Координаты точки обычно записывают в круглых скобках после буквы, обозначающей точку. Так запись $M(\alpha, \beta)$ означает, что $\mathbf{OM} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2$. На плоскости также оказывается удобнее использовать не произвольный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, а так называемый *ортонормированный* базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, который характеризуется следующими свойствами:

1) $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = \mathbf{1}$;

2) векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ взаимно перпендикулярны (или, иначе, *ортогональны*);

3) кратчайший поворот вектора $\mathbf{i}$ к вектору $\mathbf{j}$ осуществим как поворот против движения часовой стрелки.

Определение 3.8. Система координат, в основе которой лежит ортонормированный базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, называется *прямоугольной декартовой* системой координат на плоскости.

Прямая, проходящая через точку O и параллельная вектору $\mathbf{i}$, обычно называется координатной осью Ox, а соответствующая координата точки, обозначаемая через x, называется *абсциссой* точки M. Вторая, перпендикулярная первой, прямая, параллельная вектору $\mathbf{j}$, называется осью Oy, а соответствующая координата точки, обозначаемая через y, называется *ординатой* точки M.

Определение 3.9. Системой координат в пространстве называется совокупность фиксированной точки O и фиксированного базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве.

Точка O называется *началом* координат, вектор **OM**, как было указано выше, называется радиусом-вектором точки M.

Определение 3.10. Координатами точки M в пространстве называются координаты радиуса-вектора **OM** в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Таким образом, каждой точке пространства M поставлена в соответствие упорядоченная тройка чисел: координаты вектора **OM** в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Координаты точки в пространстве также записывают в круглых скобках после буквы, обозначающей точку. Так запись $M(\alpha, \beta, \gamma)$ означает, что $\mathbf{OM} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3$. В пространстве также оказывается удобнее использовать не произвольный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, а *ортонормированный* базис **i**, **j**, **k**, который обладает следующими свойствами:

1) $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = \mathbf{1}$;

2) векторы **i**, **j** и **k** взаимно перпендикулярны (*ортогональны*);

3) кратчайший поворот вектора **i** к вектору **j** должен наблюдаться с конца вектора **k** как поворот против направления движения часовой стрелки. В последнем случае говорят, что тройка векторов **i**, **j**, **k** является *правой* тройкой. Порождаемая ими система координат также носит название *правой системы координат*.

Определение 3.11. Система координат, в основе которой лежит ортонормированный базис **i**, **j**, **k**, называется *прямоугольной декартовой* системой координат в пространстве.

Прямая, проходящая через точку O и параллельная вектору **i**, обычно называется координатной осью Ox, а соответствующая координата точки, обозначаемая через x, называется *абсциссой* точки M. Вторая, перпендикулярная первой, прямая, параллельная вектору **j**, называется осью Oy, а соответствующая координата точки, обозначаемая через y, называется *ординатой* точки M. Третья прямая, проходящая через точку O и параллельная вектору **k**, называется осью Oz, а соответствующая координата точки, обозначаемая через z, называется *аппликатой* точки M. Таким образом, каждой точке пространства M ставится в соответствие упорядоченная тройка чисел: $M(x, y, z)$. Последняя запись означает, что имеет место следующее разложение вектора **OM**:

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Очевидно, что своими координатами точка M однозначно определяется.

Рассмотрим несколько вспомогательных задач, связанных с системами координат.

Задача 1. По известным координатам точек A и B найти координаты вектора **AB**.

Координатами вектора **AB** являются числа x_{AB}, y_{AB}, z_{AB}, удовлетворяющие равенству $\mathbf{AB} = x_{AB}\mathbf{i} + y_{AB}\mathbf{j} + z_{AB}\mathbf{k}$, которое удобно записывать в более компактной форме: $\mathbf{AB} = \{x_{AB}, y_{AB}, z_{AB}\}$.

Пусть $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. Тогда имеем: $\mathbf{OB} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB}$. Это векторное равенство эквивалентно трем скалярным соотношениям: $x_B = x_A + x_{AB}$; $y_B = y_A + y_{AB}$; $z_B = z_A + z_{AB}$, из которых получается, что

$$\mathbf{AB} = \{x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A\}.$$

Таким образом, чтобы найти координаты вектора, следует из координат его конца вычесть координаты начала.

Задача 2. Найти координаты середины отрезка прямой, соединяющего точки A и B, если известны координаты этих точек.

Обозначим через C точку, являющуюся серединой отрезка **AB**, а ее координаты — через x_C, y_C, z_C. Тогда $\mathbf{OC} = x_C\mathbf{i} + y_C\mathbf{j} + z_C\mathbf{k}$. Но вектор **OC** можно представить так:

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OA} + \frac{1}{2}\mathbf{AB}.$$

Это равенство означает, что

$$x_C = x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A);\ y_C = y_A + \frac{1}{2}(y_B - y_A);\ z_C = z_A + \frac{1}{2}(z_B - z_A).$$

Следовательно,

$$x_C = \frac{1}{2}(x_B + x_A);\ y_C = \frac{1}{2}(y_B + y_A);\ z_C = \frac{1}{2}(z_B + z_A),$$

т. е. координаты середины отрезка равны средним арифметическим значениям от координат его концов.

Задача 3. Найти расстояния между двумя данными точками. Для решения этой задачи заметим, что расстояние между точками A и B равно длине вектора **AB**, т. е. величине $|\mathbf{AB}|$. Поскольку система координат является прямоугольной декартовой системой, то из разложения вектора

$$\mathbf{AB} = \{x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A\} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}$$

следует, что вектор **AB**, являясь суммой трех взаимно перпендикулярных векторов, геометрически изображается диагональю прямоугольного параллелепипеда, длины сторон которого равны $|x_B - x_A|$, $|y_B - y_A|$, $|z_B - z_A|$. Следовательно,

$$|\mathbf{AB}|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2.$$

Таким образом, расстояние между точками A и B может быть найдено по формуле

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

На плоскости это расстояние будет находиться по формуле

$|\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, а на прямой — $|\mathbf{AB}| = |x_B - x_A|$.

В заключение приведем без доказательства *условие ортогональности двух векторов*: векторы $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$

секающихся» множеств, либо $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ — если их число бесконечно. Пустое множество, обозначаемое обычно через $\varnothing$, при объединении играет роль нуля при сложении чисел: для любого множества A имеет место равенство $A \cup \varnothing = A$.

1.2. Конечные и бесконечные, счетные и несчетные множества

Если конечные множества характеризуются количеством своих элементов, выражаемым конечным числом, то для бесконечных множеств такой характеристики не существует. Употребляется символ ∞, который указывает на то, что множество является бесконечным, но этот символ не так хорошо характеризует множество, как конечное число. Если множество конечно и известно число его элементов, то это число говорит не только о конечности множества, но и о том, например, на сколько равных групп его можно разбить. Более того, все конечные множества с одинаковым числом элементов обладают одними и теми же свойствами, между любыми двумя такими множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, когда каждому элементу одного множества ставится в соответствие один элемент другого множества и при этом любому элементу второго множества поставлен в соответствие только один элемент из первого множества. Например, пусть $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{2, 6, 10, 14\}$. Тогда, ставя в соответствие каждому числу X из множества A то число из множества B, которое равно $2X$, получим взаимно однозначное соответствие между множествами A и B.

С бесконечными множествами дело обстоит сложнее: между некоторыми бесконечными множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, а между некоторыми — нельзя. Наиболее привычное нам бесконечное множество — это множество натуральных чисел $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$. Другие бесконечные множества, наиболее часто используемые в математике, это:

• $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел (включая 0, положительные и отрицательные целые числа);

• $\mathbf{R}^1$ — множество действительных чисел (все обычные числа, называемые еще вещественными);

• $\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел (чисел, которые можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m и $n \notin \mathbf{Z}$, $n \neq 0$);

• $[a, b]$, где $a < b$ — два действительных числа; это множество, называемое отрезком, состоит из всех действительных чисел X, удовлетворяющих условиям:

ортогональны (с учетом соглашения: нулевой вектор ортогонален любому вектору) тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Для векторов на плоскости xOy это условие имеет вид $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

3.3. Понятие уравнения линии и уравнения поверхности

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат. И пусть имеется уравнение, связывающее две переменные x и y, $F(x, y) = 0$ и некоторая линия на плоскости L. Например, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ — уравнение и L — окружность с центром в точке O и радиусом, равным единице.

Определение 3.12. Уравнение $F(x, y) = 0$ называется *уравнением линии* L в данной системе координат, если координаты любой точки $M(x, y)$, лежащей на L, удовлетворяют этому уравнению, и наоборот, если координаты какой-либо точки удовлетворяют этому уравнению, то точка лежит на линии L.

Пример 3.1. Приведенное выше уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ является уравнением окружности с центром в точке O и радиусом, равным единице. Действительно, уравнение, переписанное в виде $x^2 + y^2 = 1$, может быть истолковано так: уравнению удовлетворяют те и только те точки плоскости, для которых величина $x^2 + y^2$, равная квадрату расстояния от точки до точки $O(0, 0)$, постоянна и равна единице. Очевидно, что этим свойством обладают только точки, лежащие на окружности с центром в точке O и радиусом, равным единице.

Замечание. Рассуждения, аналогичные тем, что были приведены выше, позволяют сделать вывод о том, что уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ является уравнением окружности с центром в точке O и радиусом, равным R.

Если рассмотреть уравнение $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$, то без особого труда аналогичными рассуждениями удастся доказать, что оно является уравнением окружности с центром в точке $A(x_A, y_A)$ и радиусом, равным R.

В пространстве уравнение $F(x, y, z) = 0$ является, как правило, уравнением поверхности. Соответствующее этому случаю определение вполне аналогично определению уравнения линии.

Определение 3.13. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется *уравнением поверхности* S в данной системе координат, если координаты любой точки $M(x, y, z)$, лежащей на S, удовлетворяют этому уравнению, и наоборот, если координаты какой-либо точки удовлетворяют уравнению, то эта точка лежит на S.

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$. Аналогично случаю плоскости легко устанавливается, что этому уравнению удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые находятся на расстоянии R от точки $A(x_A, y_A, z_A)$. Следовательно, рассматриваемое уравнение является уравнением сферы с центром в точке $A(x_A, y_A, z_A)$, имеющей радиус, равный R.

В дальнейшем будут рассмотрены другие примеры уравнений линий на плоскости и поверхностей в пространстве.

3.4. Различные виды уравнения прямой на плоскости

3.4.1. Общее уравнение прямой

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат с началом в точке O и с базисными векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$. В дальнейшем такую плоскость будем называть *координатной плоскостью* xOy, точка M на этой плоскости имеет координаты x и y. Рассмотрим уравнение первой степени, связывающее эти координаты: $Ax + By + C = 0$, где A, B, C — заданные числа такие, что $A^2 + B^2 \neq 0$, x, y — координаты точки на плоскости. Для одних точек их координаты удовлетворяют этому уравнению, для других — нет. Координаты x, y, входящие в уравнение, называют *текущими* координатами точки.

Теорема 3.1. Уравнение $Ax + By + C = 0$, $(A^2 + B^2 \neq 0)$, рассмотренное на плоскости xOy, является уравнением прямой линии.

Доказательство. Поскольку $A^2 + B^2 \neq 0$, то найдется точка $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению, т. е. $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Введем вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$ и рассмотрим на плоскости xOy прямую, проходящую через точку M_0 и перпендикулярную вектору $\mathbf{n}$. Заметим, что точка $M(x, y)$ принадлежит этой прямой тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{M_0M}$ перпендикулярен (ортогонален) вектору $\mathbf{n}$. Вектор $\mathbf{M_0M}$ имеет координаты: $\mathbf{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$. Используя необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов, получим, что $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Но $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Поэтому равенство $Ax + By + C = 0$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала прямой. Следовательно, уравнение $Ax + By + C = 0$ действительно является уравнением этой прямой. ▲

Следствие. Если прямая на плоскости xOy задана уравнением $Ax + By + C = 0$, то вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$ перпендикулярен этой прямой.

Этот вектор называется вектором *нормали* к прямой, или нормальным вектором к данной прямой.

Определение 3.14. Уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ называется *общим уравнением* прямой.

Замечание 1. Нетрудно доказать, что для любой прямой линии, проведенной на плоскости xOy, существует уравнение $Ax + By + C = 0$, которое является уравнением этой линии.

Замечание 2. Как следует из теории систем линейных уравнений, уравнение $Ax + By + C = 0$ после умножения на любое число, отличное от нуля, переходит в уравнение, эквивалентное исходному. Поэтому уравнение прямой линии при умножении на такое число останется уравнением той же прямой.

3.4.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ коэффициент при y отличен от нуля, то уравнение можно переписать в следующей форме:

$$y = kx + b,$$

где $k = -\left(\dfrac{A}{B}\right)$ — число, называемое *угловым коэффициентом*, $b = -\left(\dfrac{C}{B}\right)$.

Определение 3.15. Уравнение прямой линии, записанное в форме $y = kx + b$, называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Определение 3.16. Пусть прямая на плоскости xOy пересекает ось Ox в точке F. Наименьший угол, на который следует повернуть против часовой стрелки вокруг точки F ось Ox так, чтобы она совпала с прямой, называется *углом наклона* φ прямой. Если прямая параллельна или совпадает с осью Ox, то угол наклона считается равным нулю.

Таким образом, измеренный в радианах угол наклона φ удовлетворяет неравенствам $0 \le \varphi < \pi$.

Чтобы пояснить геометрический смысл углового коэффициента, возьмем на прямой две точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $(x_1 < x_2)$. Тогда $y_2 = kx_2 + b$ и $y_1 = kx_1 + b$. Вычитая из первого равенства второе и разделив левую и правую части на $(x_2 - x_1)$, получим

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Если через точку M_1 провести прямую, параллельную оси Ox, а через точку M_2 — прямую, параллельную оси Oy, то эти прямые пересекутся в точке $M_3(x_2, y_1)$. При этом $|\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3| = |x_2 - x_1|$, а $|\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3| = |y_2 - y_1|$. Поэтому $|k| = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол при вершине M_1 в треугольнике $M_1M_2M_3$. Теперь заметим, что поскольку $x_1 < x_2$ и поэтому $|x_2 - x_1| = x_2 - x_1$, то знак коэффициента k определяется знаком разности $y_2 - y_1$.Нетрудно убедиться в том, что, если угол наклона прямой удовлетворяет неравенствам $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, то $y_2 - y_1 > 0$, а значит, и $k > 0$. При этом оказывается, что угол α равен углу φ. Следовательно, угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\varphi$. Если же $\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, то $y_2 - y_1 < 0$, и поэтому $k < 0$. При этом оказывается, что угол α равен $\pi - \varphi$, и в этом случае получаем

$$k = -\mathrm{tg}\,\alpha = -\mathrm{tg}\,(\pi - \varphi) = \mathrm{tg}\,\varphi.$$

Таким образом, в любом случае оказывается, что угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона прямой. Полученный результат оказывается полезным при решении такой задачи, как нахождение угла между двумя прямыми. Действительно, один из углов между прямыми всегда равен разности углов наклона этих прямых. Обозначая этот угол через β, а углы наклона прямых — через φ_1 и φ_2 соответственно, получим

$$\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\,(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi_2 - \mathrm{tg}\,\varphi_1}{1 + \mathrm{tg}\,\varphi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

т.е. тангенс угла между прямыми выражен через их угловые коэффициенты.

В частном случае, когда угол $\beta = 90^\circ$ (прямые взаимно перпендикулярны) $\mathrm{tg}\,\beta$ не существует. Из полученной формулы видно, что это бывает тогда и только тогда, когда знаменатель дроби равен нулю, т.е. выполняется равенство $1 + k_1 k_2 = 0$. Или

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Это условие является необходимым и достаточным для взаимной перпендикулярности двух прямых.

3.4.3. Уравнение прямой «в отрезках»

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ все коэффициенты отличны от нуля, то уравнение можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)} = 1.$$

Обозначая $\left(-\frac{C}{A}\right) = a, \left(-\frac{C}{B}\right) = b$, получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

называемое *уравнением прямой «в отрезках»*. Числа a и b имеют следующий геометрический смысл: если прямая пересекает ось Ox в точке A, а ось Oy — в точке B, то $A(a, 0)$, $B(0, b)$ и $|OA| = |a|$, $|OB| = |b|$, т.е. модули чисел a и b равны длинам отрезков OA и OB, отсекаемых прямой от осей координат.

3.5. Различные виды уравнения плоскости в пространстве

3.5.1. Общее уравнение плоскости

Пусть в пространстве введена прямоугольная декартова система координат с началом координат в точке O и с базисными векторами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$. Каждая точка M этого пространства имеет координаты x, y, z. Рассмотрим уравнение первой степени, связывающее эти координаты: $Ax + By + Cz + D = 0$, где коэффициенты подчинены условию $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Теорема 3.2. Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$, является уравнением плоскости.

Доказательство. Условие $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ позволяет утверждать, что найдется точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, т. е. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Рассмотрим вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ и плоскость, которая проходит через точку M_0 и перпендикулярна этому вектору. Точка $M(x, y, z)$ будет лежать в этой плоскости тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{M_0M}$ будет перпендикулярен вектору $\mathbf{n}$. Далее, $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ и $\mathbf{M_0M} = \{x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\}$. Используя необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов в координатной форме, получим, что $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Поскольку $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$, окончательно получим: $Ax + By + Cz + D = 0$. Итак, точка $M(x, y, z)$ будет тогда и только тогда принадлежать плоскости, когда ее координаты удовлетворяют данному уравнению. Следовательно, это уравнение является уравнением плоскости. ▲

Следствие. Если плоскость задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ перпендикулярен этой плоскости.

Этот вектор называется *вектором нормали* к плоскости, или нормальным вектором к данной плоскости.

Определение 3.17. Уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ называется *общим уравнением* плоскости.

Замечание 1. Нетрудно доказать, что для любой плоскости существует уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, которое является уравнением этой поверхности.

Замечание 2. Как следует из теории систем линейных уравнений, уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ после умножения на любое число, отличное от нуля, переходит в уравнение, эквивалентное исходному. Поэтому уравнение плоскости при умножении на такое число останется уравнением той же плоскости.

3.5.2. Уравнение плоскости «в отрезках»

Если все коэффициенты в уравнении плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ отличны от нуля, то уравнение можно привести к следующему виду:

$$\frac{x}{\left(-\frac{D}{A}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{D}{B}\right)}+\frac{z}{\left(-\frac{D}{C}\right)}=1,$$

или, обозначив $\left(-\frac{D}{A}\right)=a, \left(-\frac{D}{B}\right)=b, \left(-\frac{D}{C}\right)=c$,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Это уравнение носит название *уравнения плоскости «в отрезках»*. Геометрический смысл чисел a, b и c аналогичен геометрическому смыслу таких чисел в уравнении прямой «в отрезках»: точки с координатами $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ и $C(0,0,c)$ являются точками пересечения плоскости с осями координат. Поэтому $|OA| = |a|$, $|OB| = |b|$, $|OC| = |c|$, или модули чисел a, b и c равны длинам отрезков, отсекаемых плоскостью от осей координат.

3.5.3. Нормированное уравнение плоскости

Если в уравнении плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), коэффициент $D \neq 0$, то уравнение можно преобразовать следующим образом. Вычислим коэффициент

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

и выберем у него знак таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\mu D < 0$, и умножим уравнение на μ. Получившееся уравнение $(\mu A)x + (\mu B)y + (\mu C)z + (\mu D) = 0$ называется *нормированным* (*или нормальным*) уравнением плоскости. Оно обладает полезным при решении ряда задач *основным* свойством. При подстановке в это уравнение координат любой точки $P(\alpha, \beta, \gamma)$ в левой части уравнения получится число δ, называемое *уклонением* точки P от плоскости. Если точка P и точка O (начало координат) лежат по одну сторону от данной плоскости, то δ будет равно расстоянию от точки P до плоскости, взятому со знаком минус. Если же точки P и O лежат по разные стороны плоскости, то δ будет равно расстоянию от точки P до плоскости. В любом случае расположения точки P модуль числа δ будет равен расстоянию от точки P до плоскости.

Доказательство этого свойства здесь не приводим.

Пример 3.3. Пусть требуется найти расстояние от точки $P(3,-9,3)$ до плоскости, заданной уравнением $2x - y - 2z + 6 = 0$. Воспользуемся нормированным уравнением плоскости. Найдем коэффициент

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{\pm 1}{3}.$$

Учитывая, что знак у числа $D = 6$ положителен, выбираем знак минус. Таким образом, $\mu = -\frac{1}{3}$. Нормированное уравнение плоскости имеет вид:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)y + \left(\frac{2}{3}\right)z - 2 = 0.$$

Подставляя в левую часть координаты точки P, получим $\delta = -5$. Следовательно, точка P и точка O лежат по одну сторону от плоскости и расстояние от точки P до этой плоскости равно 5.

3.6. Уравнения прямой в пространстве

3.6.1. Общие уравнения прямой

В пространстве прямая обычно задается как линия пересечения двух плоскостей. Для этого уравнения этих плоскостей рассматриваются совместно в виде системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

При этом важно, чтобы плоскости, задаваемые этими уравнениями, пересекались, а не были параллельными или совпадающими. Две плоскости будут пересекаться по прямой тогда и только тогда, когда их векторы нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ не коллинеарны. Учитывая условие коллинеарности двух векторов, получим, что плоскости будут пересекаться по прямой линии тогда и только тогда, когда координаты векторов $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ не будут пропорциональны. (Напомним, что пропорциональность означает выполнение равенств $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.) Итак, если коэффициенты в уравнениях двух плоскостей при переменных x, y и z не будут пропорциональны, то эти уравнения, рассмотренные совместно, определяют прямую в пространстве.

Определение 3.18. Уравнения (3.1) при выполнении указанных условий называются *общими уравнениями прямой* в пространстве.

Заметим, что одновременно обоим уравнениям удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые одновременно принадлежат как одной, так и другой плоскости, т. е. лежат на их линии пересечения, на прямой. Очевидно, что плоскостей, проходящих через фиксированную прямую, бесконечно много. Поэтому и общие уравнения прямой могут быть сформированы бесконечным числом способов: достаточно взять уравнения любых двух различных плоскостей, проходящих через эту прямую.

Рассмотрим такое понятие, как *пучок плоскостей*. Это множество всех плоскостей, проходящих через одну фиксированную прямую. Оказывается, что любая плоскость из этого множества может быть получена из общей формулы

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (3.2)$$

за счет выбора соответствующих значений параметров α и β. Поэтому уравнение (3.2) называется *уравнением пучка плоскостей*. При любых значениях α и β, одновременно не равных нулю, уравнение (3.2) дает уравнение плоскости, проходящей через фиксированную прямую, но для каждой такой плоскости соответствующие значения параметров α и β определяются неоднозначно. Если предположить, что $\beta \neq 0$, то вводя новый параметр $\lambda = \dfrac{\alpha}{\beta}$, уравнению (3.2) можно придать следующий вид:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (3.3)$$

В этой форме уравнение пучка зависит от одного параметра λ, что оказывается более удобным при решении задач, но из всего пучка выпадает одна плоскость, имеющая уравнение $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ (это соответствует случаю $\beta = 0$). Если про это обстоятельство не забывать, то можно пользоваться уравнением пучка плоскостей в форме (3.3).

Пример 3.4. Через прямую, заданную общими уравнениями

$$\begin{cases} x - 3y + 5z - 3 = 0; \\ 2x + y - 3z - 5 = 0, \end{cases}$$

надо провести плоскость, проходящую через точку $M(2, 1, 1)$.

Решение. Искомая плоскость принадлежит пучку плоскостей, проходящих через данную прямую. Запишем уравнение пучка в форме (3.3):

$$\lambda(x - 3y + 5z - 3) + (2x + y - 3z - 5) = 0.$$

Проверим, что плоскость, заданная уравнением $x - 3y + 5z - 3 = 0$, не дает решения задачи. Действительно, подстановка координат точки $M(2, 1, 1)$ в это уравнение показывает, что оно не удовлетворяется, и, следовательно, данная плоскость не проходит через точку M, т.е. не является решением поставленной задачи. Подставив координаты точки M в уравнение пучка, получим

$$(\lambda + 2)2 + (1 - \lambda)1 + (5\lambda - 3)1 - 3\lambda - 5 = 0.$$

Решая уравнение относительно неизвестного значения параметра λ, находим $\lambda = 3$. Следовательно, искомую плоскость можно определить из уравнения пучка, если параметру λ придать значение $\lambda = 3$. В итоге уравнение искомой плоскости имеет вид

$$5x - 8y + 12z - 14 = 0.$$

3.6.2. Канонические уравнения прямой в пространстве

Определение 3.19. Ненулевой вектор $\mathbf{a} = \{p,\ q,\ r\}$, коллинеарный прямой L, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Как следует из определения, у прямой существует бесконечно много направляющих векторов. Например, если имеется один направляющий вектор, то умножив его на число, отличное от нуля, получим снова направляющий вектор этой прямой. Поскольку различных чисел бесконечно много, то и направляющих векторов тоже будет бесконечно много. С другой стороны, все направляющие векторы коллинеарны прямой L, а следовательно, коллинеарны друг другу. Откуда следует, что для любых двух направляющих векторов $\mathbf{a}$ и $\tilde{\mathbf{a}}$ найдется число μ ($\mu \neq 0$) такое, что $\mathbf{a} = \mu\tilde{\mathbf{a}}$.

Пусть $\mathbf{a} = \{p, q, r\}$ — направляющий вектор прямой L, а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка на этой прямой. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$. Точка $M(x, y, z)$ будет лежать на прямой L тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{M_0M}$ будет коллинеарен этой прямой или, что то же, коллинеарен направляющему вектору $\mathbf{a} = \{p, q, r\}$. Вектор $\mathbf{M_0M} = \{x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\}$, и условие его коллинеарности вектору $\mathbf{a} = \{p, q, r\}$ можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \tag{3.4}$$

Таким образом, точка $M(x, y, z)$ будет лежать на прямой L тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнениям (3.4). Поэтому естественно назвать эти уравнения уравнениями прямой L.

Определение 3.20. Уравнения (3.4) называются *каноническими* уравнениями прямой L.

Если известны канонические уравнения прямой, то из них сразу можно получить направляющий вектор прямой и координаты точки M_0, принадлежащей этой прямой. Эта информация часто оказывается полезной при решении задач. В отличие от канонических уравнений прямой, общие уравнения не содержат явно этой информации. Поэтому при решении ряда задач приходится дополнительно затрачивать усилия на ее получение из общих уравнений. Это можно сделать, например, по следующей схеме. Поскольку в общих уравнениях прямой, как было показано, коэффициенты при переменных x, y, z не пропорциональны, т.е. не все отношения коэффициентов $\dfrac{A_1}{A_2}$, $\dfrac{B_1}{B_2}$, $\dfrac{C_1}{C_2}$ равны между собой, то найдется пара неравных отношений. Пусть, например, $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$. Тогда систему уравнений (3.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z - D_1; \\ A_2x + B_2y = -C_2z - D_2. \end{cases}$$

Дадим z какое-либо значение $z = z_1$. Тогда правая часть системы будет иметь конкретные значения, и относительно переменных x и y получится система двух уравнений с двумя неизвестными с определителем, не равным нулю ($A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, так как $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$). По правилу Крамера однозначно находятся координаты x_1 и y_1, соответствующие значению $z = z_1$. Тем самым оказалось найденным одно из решений системы (3.1), т.е. координаты точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежащей на прямой L. Если теперь дать переменному z другое значение $z = z_2$, $z_2 \neq z_1$, то будет найдена тем же способом вторая точка на прямой $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Зная две точки на прямой, находим направляющий вектор прямой:

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}.$$

Таким образом, задача нахождения координат точки на прямой и ее направляющего вектора решена.

Пример 3.5. Прямая L задана общими уравнениями

$$\begin{cases} x - \ \ y + z - 10 = 0; \\ 2x - 8y - z - 23 = 0, \end{cases}$$

и пусть требуется написать канонические уравнения этой прямой.

Решение. Поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} x - y = -z + 10; \\ 2x - 8y = z + 23. \end{cases}$$

Задаем значение $z = 1$ и решаем получающуюся систему по правилу Крамера. Имеем

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 24 & -8 \end{vmatrix} = -48;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 24 \end{vmatrix} = 6;\ \Delta = -6.$$

Таким образом, $x_1 = 8$, $y_1 = -1$, $z_1 = 1$ и $M_1(8, -1, 1)$.

Теперь задаем другое значение: $z = 5$ и снова решаем получающуюся систему, которая имеет вид

$$\begin{cases} x - \ \ y = 5; \\ 2x - 8y = 28. \end{cases}$$

Имеем

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 28 & -8 \end{vmatrix} = -12;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 28 \end{vmatrix} = 18;\ \Delta = -6.$$

$$a \le X \le b;$$

• $\mathbf{R}^n = \{\bar{x}\colon \bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n),\ x_j \in \mathbf{R}^1,\ j = 1, 2, ..., n\},\ n \in \mathbf{N}$. Это множество состоит из упорядоченных наборов из n действительных чисел. Например, наборы чисел $(-5; \sqrt{3}; 0)$, $(\frac{2}{7}; 4; -1,5)$ являются элементами множества $\mathbf{R}^3$.

Важную роль в теории бесконечных множеств играют *счетные* множества. Это такие бесконечные множества, все элементы которых можно занумеровать, т.е. установить взаимно однозначное соответствие между ними и множеством натуральных чисел $\mathbf{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$.

Например, множество натуральных четных чисел $\mathbf{N}_2 = \{2, 4, ..., 2n, ...\}$ будет счетным. Его легко занумеровать, т.е. каждому элементу множества дать свой номер: числу 2 дадим номер 1, следующему числу 4 — номер 2 и вообще, числу $2n$ — номер n. Таким образом каждое четное натуральное число получило свой номер. Например, число 100 будет иметь номер 50. Здесь мы сталкиваемся с удивительным фактом: четные числа, составляющие половину всех натуральных чисел, содержат такое же «количество» чисел, как и множество всех натуральных чисел. Слово «количество» здесь уже неуместно, и поэтому говорят иначе: множества $\mathbf{N}_2$ и $\mathbf{N}$ имеют одинаковую *мощность*. Таким образом, счетные множества — это такие множества, которые имеют одинаковую мощность с множеством $\mathbf{N}$. Таких множеств довольно много. Но не всегда бывает просто доказать, что множество является счетным. Так, например, множество $\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел — будет счетным. Однако доказательство этого факта несколько тяжеловесно, поэтому здесь не приводится. Счетное множество можно представить как «минимальное» бесконечное множество: легко доказать, что любое бесконечное множество содержит подмножество, являющееся счетным. Поэтому не существует бесконечного множества, которое не содержало бы счетного подмножества, т.е. не существует бесконечного множества, которое было бы в этом смысле «меньше», чем счетное множество.

С другой стороны, любое бесконечное подмножество счетного множества является счетным. Этот и еще несколько фактов приведем без доказательства:

• объединение двух и более (в конечном числе) счетных множеств — счетно;

• объединение счетного числа счетных множеств — счетно;

• существуют несчетные бесконечные множества, примерами которых могут служить такие множества, как $[a, b]$, $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^n$.

Из приведенных примеров видно, что множество всех действительных чисел не является счетным, у него другая и, естественно, бóльшая мощность. Эту мощность обычно называют мощностью *континуума*. Мощностью континуума обладают многие числовые

В итоге получается вторая точка $M_2(2,-3,5)$. Зная координаты двух точек на прямой, находим направляющий вектор:

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \{2-8,\ -3+1,\ 5-1\} = \{-6,-2,4\}.$$

Теперь, зная координаты направляющего вектора и одной из точек, пишем канонические уравнения прямой

$$\frac{x-8}{-6} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{4}.$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, исходя из разобранного примера, могут быть написаны для любых двух точек. Очевидно, что они имеют следующий вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.5)$$

Если в знаменателе какой-либо дроби оказалось число, равное нулю, то в соответствии с соглашением о пропорциональности координат векторов считаем, что соответствующий числитель тоже равен нулю. Например, если $x_2 = x_1$, то канонические уравнения прямой будут иметь вид

$$x = x_1,\ \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Если же выполняются два равенства: $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$, то канонические уравнения прямой будут иметь вид

$$x = x_1,\ y = y_1$$

(z принимает любые значения, а это означает, что прямая параллельна оси Oz).

3.6.3. Параметрические уравнения прямой в пространстве

Если, имея канонические уравнения прямой, ввести в рассмотрение параметр t следующим образом:

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} = t,$$

то текущие координаты точки на прямой становятся функциями этого параметра:

$$x = x_0 + pt;\ y = y_0 + qt;\ z = z_0 + rt;\ -\infty < t < +\infty. \qquad (3.6)$$

Если имеются координаты какой-либо точки на прямой, то из уравнений (3.6) однозначно находится соответствующее этой точке значение параметра t. И наоборот, зная значение параметра t, по уравнениям (3.6) однозначно находятся координаты точки. Таким образом, каждой точке на прямой соответствует единственное значение параметра t, и каждому значению параметра t соответствует единственная точка на прямой.

Определение 3.21. Уравнения (3.6) называются *параметрическими уравнениями* прямой.

Очевидно, что переход от параметрических уравнений прямой к каноническим и наоборот не представляет никаких трудностей. По сравнению с каноническими параметрические уравнения при решении ряда задач имеют преимущества, продемонстрируем это на примере.

Пример 3.6. В пространстве две прямые, если они не параллельны, не обязаны пересекаться. Они могут, как говорится, *скрещиваться*, т. е. лежать в двух параллельных плоскостях и не быть друг другу параллельными. В этом случае существует прямая, которая перпендикулярна этим двум плоскостям и пересекает обе прямые. Эта прямая называется *общим перпендикуляром* к двум скрещивающимся прямым. Пусть первая прямая L_1 имеет канонические уравнения

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-1}{-1},$$

а вторая прямая L_2 —

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{1}.$$

Необходимо написать канонические уравнения общего перпендикуляра к этим двум прямым.

Решение. Перейдем к параметрическим уравнениям этих прямых. Для прямой L_1 получим

$$x = 1 + 2t;\ y = 5 + 2t;\ z = 1 - t.$$

Параметр для прямой L_2 обозначим буквой s. Тогда параметрические уравнения прямой L_2 будут иметь вид

$$x = 8 + 3s;\ y = 2 + 4s;\ z = 5 + s.$$

Пусть точка M находится на прямой L_1, и ей соответствует значение параметра t, а точка N находится на прямой L_2, и ей соответствует значение параметра s. Рассмотрим вектор

$$\mathbf{MN} = \{7 + 3s - 2t,\ -3 + 4s - 2t,\ 4 + s + t\}.$$

Этот вектор будет коллинеарен общему перпендикуляру к обеим прямым тогда и только тогда, когда он будет перпендикулярен каждой из прямых L_1 и L_2 или, что то же самое, — направляющим векторам этих прямых. Используя условия перпендикулярности векторов, получим два уравнения

$$(7 + 3s - 2t)\ (2) + (-3 + 4s - 2t)\ (2) + (4 + s + t)\ (-1) = 0,$$
$$(7 + 3s - 2t)\ (3) + (-3 + 4s - 2t)\ (4) + (4 + s + t)\ (1) = 0.$$

Преобразуя их, получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} 13s - \ \ 9t = -4; \\ 26s - 13t = -13, \end{cases}$$

единственное решение которой имеет вид: $s = -1$; $t = -1$. Зная значения параметров, находим координаты точек: $M(-1, 3, 2)$ и $N(5, -2, 4)$. По формулам (3.5) получаем уравнения общего перпендикуляра:

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-2}{2}.$$

3.7. Кривые второго порядка на плоскости

3.7.1. Понятие кривой второго порядка

Уравнение прямой на плоскости содержит только первые степени переменных x и y. Если же рассматривать уравнения, в которые входят такие слагаемые, как x^2, xy, y^2, то оказывается, что многообразие соответствующих этим уравнениям геометрических объектов на плоскости увеличивается. Появляются кривые, отличные от прямой линии. Кроме того, если рассматривать общее уравнение, содержащее вторые степени переменных x и y, а также их произведение:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + G = 0, \qquad (3.7)$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, то среди этих уравнений могут встретиться такие, которые не определяют на плоскости никакой кривой. Например, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не может быть удовлетворено никакими значениями x и y, и, следовательно, на плоскости нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы этому уравнению. Таким образом, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не определяет никакой кривой.

Но бóльшая часть уравнений, имеющих вид (3.7), все-таки определяет некоторые линии на плоскости, которые называются *кривыми второго порядка*. Уравнение (3.7) называется *общим уравнением кривой второго порядка*. Из всего множества кривых второго порядка наиболее важными его представителями являются три кривые: *эллипс*, *гипербола и парабола*. При первоначальном знакомстве с ними ограничимся следующими фактами: геометрическая характеристика, каноническое уравнение, каноническая система координат и форма кривых.

3.7.2. Эллипс

Определение 3.22. *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная и бóльшая, чем расстояние между фокусами.

Если выбрать систему прямоугольных декартовых координат на плоскости так, чтобы ось Ox проходила через фокусы эллипса, начало координат находилось посередине между ними, то в этой системе координат уравнение эллипса будет выглядеть так:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.8}$$

Замечание. Отметим, что в определении не предполагается, что фокусы F_1 и F_2 обязательно различны, не исключается и их совпадение. В последнем случае построение канонической системы координат сводится только к тому, что начало координат помещается в точку, совпадающую с фокусами, а направление координатных осей берется произвольно.

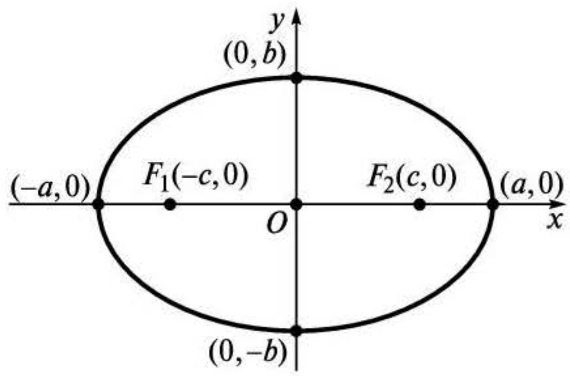


Рис. 3.1

Анализируя уравнение (3.8), прежде всего замечаем, что переменные x и y входят в уравнение во второй степени. Следовательно, эллипс — это кривая второго порядка. Величина a равна полусумме расстояний от точки эллипса до фокусов, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, где c — половина расстояния между фокусами. Если $a = b$, то $c = 0$ и, следовательно, оба фокуса сливаются в один. Уравнение (3.8) может быть переписано в виде $x^2 + y^2 = a^2$, в котором нетрудно узнать известное уравнение окружности с центром в точке O и радиусом a.

Форма, которую имеет кривая в общем случае, показана на рис. 3.1.

3.7.3. Гипербола

Определение 3.23. *Гиперболой* называется геометрическое место точек на плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных различных точек F_1 и F_2 этой плоскости, на-

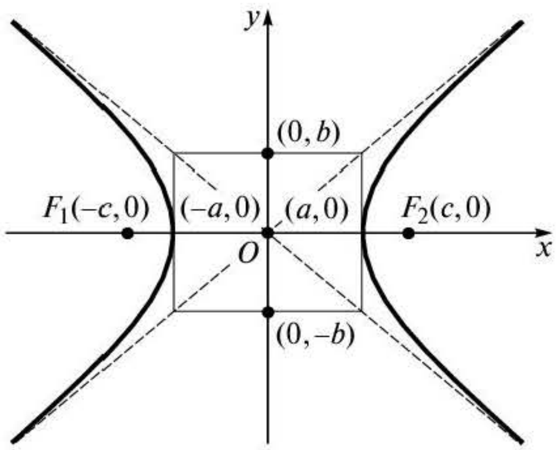


Рис. 3.2

зываемых *фокусами*, есть величина постоянная, положительная и меньшая, чем расстояние между фокусами.

Если выбрать систему прямоугольных декартовых координат на плоскости так, чтобы ось Ox проходила через фокусы F_1 и F_2, а начало координат находилось посередине между ними, то в этой системе координат уравнение гиперболы будет выглядеть так:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.9)$$

Это уравнение называется *каноническим* уравнением гиперболы. Если взять другую систему координат, уравнение будет более сложным. Поэтому выбранная система координат также называется канонической. Гипербола так же, как и эллипс, является кривой второго порядка. Величина a равна модулю полуразности расстояний от точки гиперболы до фокусов, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, где c — половина расстояния между фокусами. Форма кривой показана на рис. 3.2.

3.7.4. Парабола

Определение 3.24. Параболой называется геометрическое место точек на плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости, называемой *фокусом*, равно расстоянию до некоторой прямой, лежащей в этой плоскости и не проходящей через фокус F, называемой *директрисой*. Если выбрать систему координат таким образом, чтобы начало O находилось посередине между фокусом F и точкой $D\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из точки F на директрису, а ось Ox имела направление вектора $\mathbf{DF}$, то уравнение параболы будет иметь вид

$$y^2 = 2px. \qquad (3.10)$$

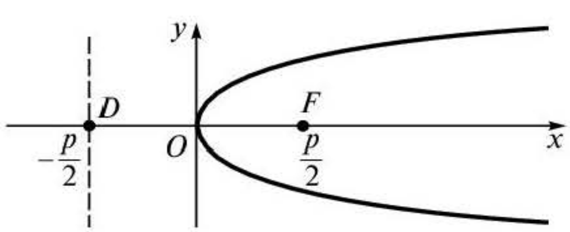


Рис. 3.3

Это уравнение называется *каноническим* уравнением параболы, а описанная выше система координат — канонической системой координат для данной параболы. Параметр p имеет простой геометрический смысл: он равен расстоянию от фокуса параболы до директрисы. Из вышесказанного следует, что фокус параболы имеет координаты $F(\frac{p}{2}, 0)$, а директриса — уравнение $x = -\frac{p}{2}$. Эта кривая также является кривой второго порядка, поскольку в ее уравнении присутствует слагаемое y^2, степень которого (в данном случае вторая) определяет порядок кривой. Эта кривая более известна из курса средней школы (как график функции, являющейся квадратным трехчленом: $y = ax^2 + bx + c$). Как выглядит эта кривая в канонической системе координат, показано на рис. 3.3.

3.8. Поверхности второго порядка

3.8.1. Общее уравнение поверхности второго порядка

Аналогично случаю плоскости в пространстве также рассматриваются геометрические объекты, определяемые уравнениями, содержащими вторые степени переменных x, y и z, а также их попарные произведения. Эти объекты, как правило, являются поверхностями и поэтому называются *поверхностями второго порядка*. Общий вид уравнения, описывающего такие объекты, можно представить следующим образом:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0, \quad (3.11)$$

где $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0$. Многообразие форм поверхностей в пространстве значительно увеличивается по сравнению с кривыми второго порядка. Поэтому имеет смысл при первоначальном знакомстве с ними ограничиться описанием их канонических уравнений, формы и расположения относительно координатных осей.

3.8.2. Эллипсоид

Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.12)$$

из которого можно сделать вывод о том, что эта поверхность симметрична относительно всех координатных плоскостей: xOy, xOz и yOz. Действительно, если точка $M(x, y, z)$ принадлежит поверхности, то это означает, что ее координаты удовлетворяют уравнению (3.12). Тогда симметричная ей относительно координатной плоскости xOy точка $M'(x, y, -z)$, очевидно, также удовлетворяет этому уравнению и, значит, принадлежит поверхности. Аналогично убеждаемся в симметрии поверхности относительно других координатных плоскостей. Рассуждая подобным образом, нетрудно убедиться в том, что координатные оси Ox, Oy и Oz являются

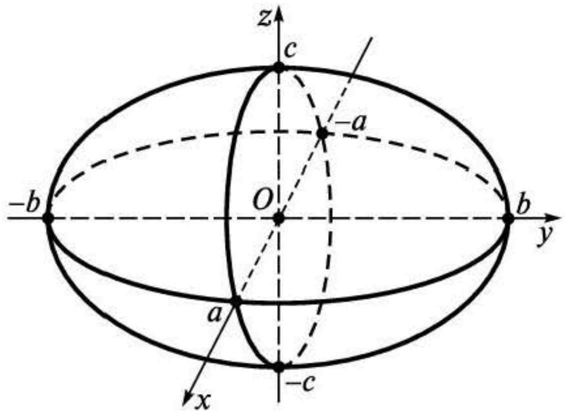


Рис. 3.4

осями симметрии, а начало координат — центром симметрии этой поверхности. Подробный анализ поверхности показывает, что эллипсоид можно получить путем вращения эллипса вокруг одной из его осей и последующего сжатия. Он представляет собой ограниченную овальную поверхность. В частности, если $a = b = c$, то уравнение (3.12) можно записать в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

в котором нетрудно узнать известное уравнение сферы с центром в начале координат радиусом a. Таким образом, сфера является частным случаем эллипсоида. Форма и расположение эллипсоида относительно осей координат изображены на рис. 3.4.

3.8.3. Гиперболоиды

Каноническое уравнение однополостного гиперболоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (3.13)$$

и, как в случае эллипсоида, нетрудно убедиться в том, что поверхность симметрична относительно координатных плоскостей xOy, xOz и yOz, оси координат являются для нее осями симметрии, а начало координат — центром симметрии. Если $a = b$, то гиперболоид называется гиперболоидом вращения, поверхность может быть получена вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, расположенной в координатной плоскости xOz вокруг оси Oz. В общем случае, если $a \neq b$, то поверхность, полученная вращением, должна быть подвергнута сжатию в направлении одной из осей: Ox или Oy. В результате в сечении плоскостями, перпендикулярными оси Oz, будут получаться не окружности, а эллипсы. Форма поверхности и ее расположение

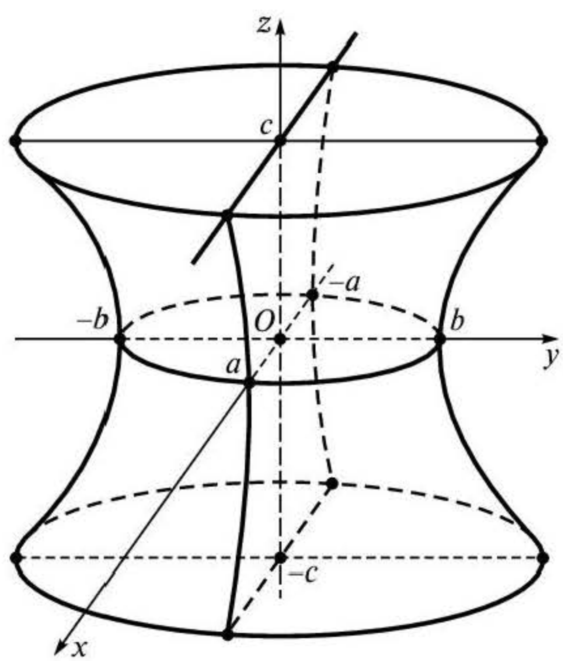


Рис. 3.5

по отношению к осям координат изображены на рис. 3.5.

Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \quad (3.14)$$

Название двуполостный гиперболоид объясняется тем, что вся поверхность состоит из двух не связанных друг с другом частей (или, как говорят, полостей). Чтобы представить, как устроена эта поверхность, достаточно взять гиперболу в координатной плоскости xOz $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ и ее вращение вокруг оси Oz приведет к двуполостному гиперболоиду вращения. Если подвергнуть его сжатию в направлении одной из осей Ox или Oy, то получится поверхность, описываемая уравнением (3.14). Все свойства симметрии, присущие однополостному гиперболоиду, сохраняются и для двуполостного гиперболоида.

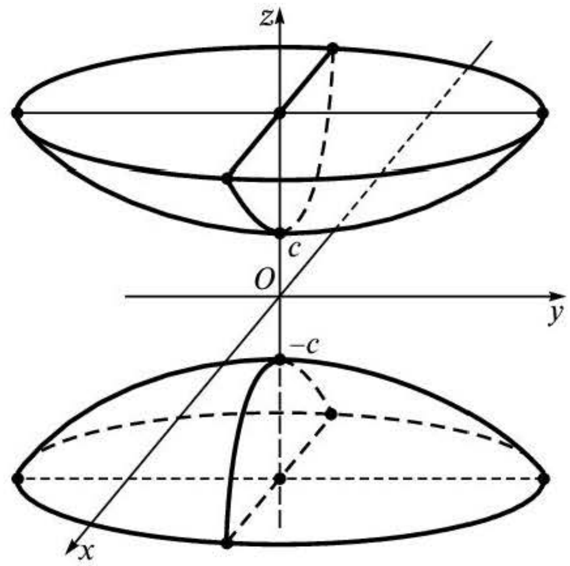


Рис. 3.6

Форма поверхности и ее расположение по отношению к осям координат изображены на рис. 3.6.

3.8.4. Конус

Каноническое уравнение конуса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \quad (3.15)$$

Эта поверхность второго порядка может быть получена путем вращения в пространстве вокруг оси Oz прямой, первоначально расположенной в плоскости xOz и имеющей уравнение $z=\frac{c}{a}x$. В этом случае получится так называемый круговой конус (в сечении которого окружности), а если его подвергнуть сжатию в направлении одной из осей Ox или Oy, то получится поверхность, описываемая

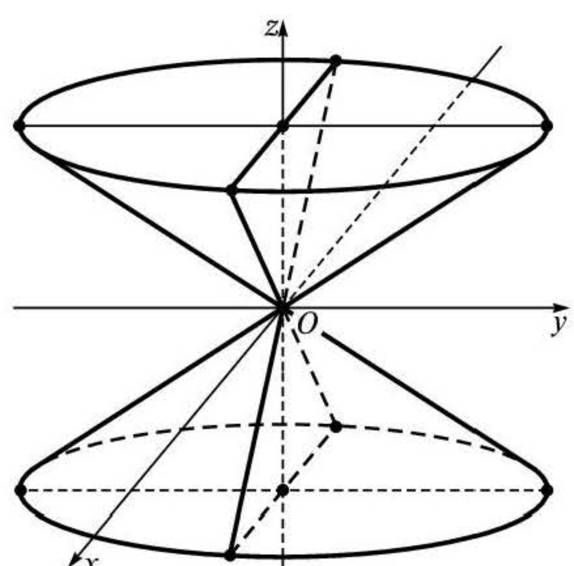


Рис. 3.7

уравнением (3.15) (в сечении плоскостью, параллельной плоскости xOy, — эллипсы). Ось Oz обычно называют осью конуса.

Форма поверхности и ее расположение по отношению к осям координат изображены на рис. 3.7.

3.8.5. Эллиптический параболоид

Каноническое уравнение эллиптического параболоида имеет вид

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \tag{3.16}$$

Исходя из вида уравнения по аналогии с предыдущими случаями, можно сделать вывод о том, что поверхность симметрична относительно координатных плоскостей xOz, yOz и относительно оси Oz. Если $a = b$, то поверхность является поверхностью вращения (она может быть получена вращением параболы, расположенной в плоскости xOz и имеющей уравнение $x^2 = a^2 z$, вокруг оси Oz). Если $a \neq b$, то поверхность, полученная вращением, должна быть подвергнута сжатию. Форма поверхности и ее расположение по отношению к осям координат изображены на рис. 3.8.

3.8.6. Гиперболический параболоид

Каноническое уравнение гиперболического параболоида имеет вид

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \tag{3.17}$$

По аналогии с предыдущими случаями делаем вывод о том, что поверхность симметрична относительно координатных плоскостей xOz, yOz и относительно оси Oz. Форма поверхности и ее

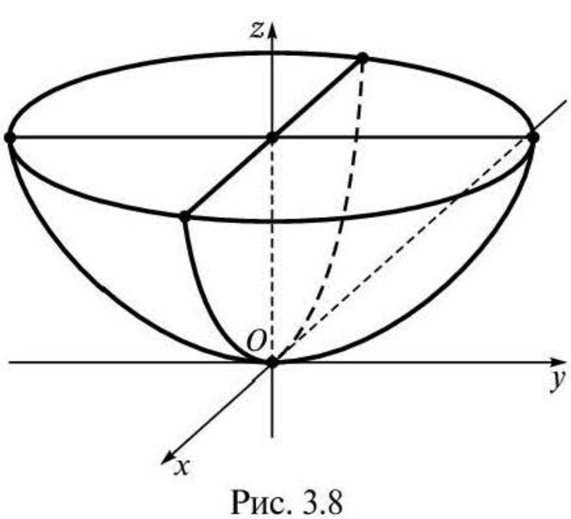


Рис. 3.8

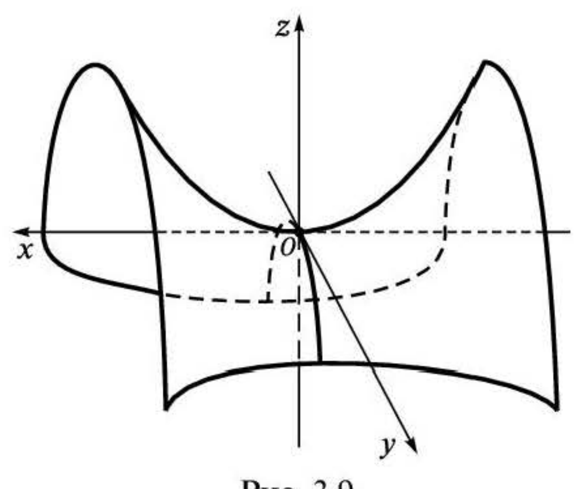


Рис. 3.9

расположение по отношению к осям координат изображены на рис. 3.9.

3.8.7. Цилиндры

Цилиндры — это поверхности второго порядка, получающиеся следующим способом. В плоскости xOy через каждую точку эллипса (3.8) проводится прямая, параллельная оси Oz. Получается бесконечная труба с поперечным сечением в форме этого эллипса. Поверхность, построенная таким способом, называется *эллиптическим цилиндром*. Оказывается, что уравнением этой поверхности будет

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

но рассматриваемое в пространстве. Действительно, если точка $M_0(x, y, 0)$, лежащая в плоскости xOy, находится на эллипсе, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению. Любая точка M', лежащая на одной прямой, параллельной оси Oz, с точкой M_0, имеет первые две координаты такие же, как и точка M_0, а поскольку координата z в уравнение (3.8) не входит, координаты точки M' будут удовлетворять этому уравнению. Таким образом, этому уравнению будут удовлетворять координаты всех точек эллиптического цилиндра. Форма поверхности и ее расположение по отношению к осям координат изображены на рис. 3.10.

Аналогично уравнение (3.9), известное как уравнение гиперболы на плоскости, рассмотренное в пространстве, оказывается уравнением поверхности (также построенной описанным выше способом), называемой *гиперболическим цилиндром*. Форма поверхности и ее расположение по отношению к осям координат изображены на рис. 3.11.

Каноническим уравнением *параболического цилиндра* будет уравнение параболы (3.10), рассмотренное как уравнение поверхности в пространстве. Сама поверхность строится по параболе тем же способом: проведением через все точки параболы прямых, параллельных оси Oz. Форма поверхности и ее расположение по отношению к осям координат изображены на рис. 3.12.

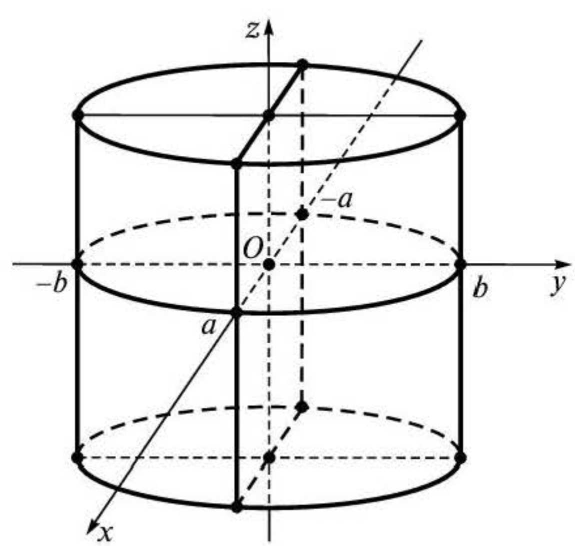


Рис. 3.10

Рассмотренные поверхности второго порядка являются осмножества: кроме всех действительных чисел $\mathbf{R}^1$, это всевозможные отрезки $[a,b]$, конечные интервалы $(a,b) = \{X \mid a < X < b\}$, полуинтервалы $[a,b) = \{X \mid a \le X < b\}$, $(a,b] = \{X \mid a < X \le b\}$; бесконечные полуинтервалы $[a,+\infty) = \{X \mid a \le X\}$, $(-\infty,a] = \{X \mid X \le a\}$; бесконечные интервалы $(a,+\infty) = \{X \mid a < X\}$, $(-\infty,a) = \{X \mid X < a\}$ и, наконец, $\mathbf{R}^1$ также может быть представлено в виде бесконечного интервала $(-\infty,+\infty)$.

1.3. Числовые множества. Действительные числа

Теория действительных чисел необходима для обоснованного использования их свойств при различных математических рассуждениях и выкладках. Свойства чисел достаточно хорошо известны из школьного курса математики, и все вышеприведенные упоминания о них базировались именно на этих представлениях, в значительной степени интуитивных. Но во многих доказательствах, где суть дела порой просматривается с трудом, четкая аргументация и ссылки на конкретные факты становятся необходимыми не только для успешного проведения доказательства, но и для его восприятия и понимания. В данном курсе нецелесообразно излагать теорию действительных чисел в полном объеме, как это обычно делается в курсах математического анализа. Здесь будет дан набор аксиом, фиксирующих все фундаментальные свойства чисел, и точное определение действительных чисел, пригодное для всех последующих применений в математических рассуждениях. Это делается на основе аксиоматики.

Определение 1.1. Множество $\mathbf{R}^1$ называется множеством *действительных чисел*, а его элементы — *действительными числами*, если и только если выполняются следующие условия, называемые аксиомами действительных чисел.

Аксиомы сложения

На множестве $\mathbf{R}^1$ определена операция сложения, когда каждой упорядоченной паре (x,y) элементов x, y из $\mathbf{R}^1$ ставится в соответствие некоторый элемент $x + y \in \mathbf{R}^1$, называемый *суммой* x и y. При этом выполнены следующие условия:

1) существует *нейтральный элемент* 0 (называемый *нулем*) такой, что для любого $x \in \mathbf{R}^1$ $x + 0 = 0 + x = x$;

2) для любого элемента $x \in \mathbf{R}^1$ найдется в $\mathbf{R}^1$ элемент $-x$ (называемый *противоположным* к x) такой, что $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

3) операция сложения *коммутативна*, что означает, что для любых элементов x и y из $\mathbf{R}^1$ выполняется равенство $x + y = y + x$;

4) операция сложения *ассоциативна*, что означает, что для любых элементов x, y и z из $\mathbf{R}^1$ выполняется равенство $(x + y) + z = x + (y + z)$.

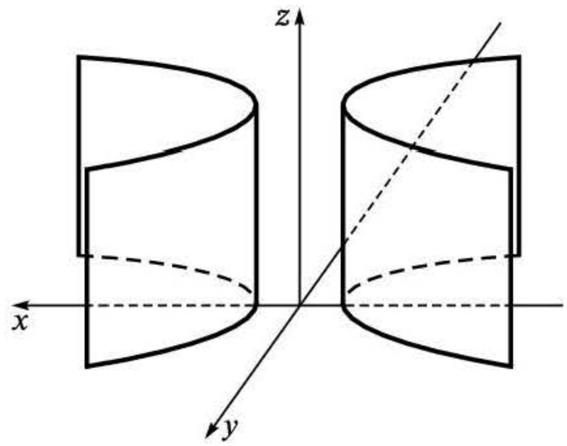


Рис. 3.11

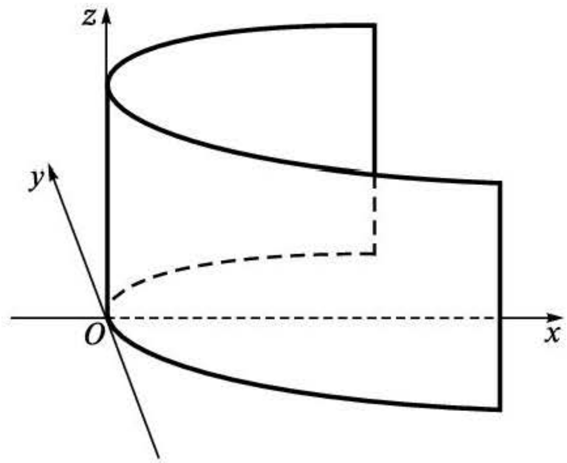


Рис. 3.12

новными представителями множества таких поверхностей. Кроме них есть различные вырожденные случаи поверхностей, как правило, представляющие второстепенный интерес. Например, уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ является уравнением не поверхности в обычном понимании, а прямой: оси Oz. Уравнение второй степени вида

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

определяет в пространстве пару плоскостей:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Если уравнение поверхности второго порядка не имеет канонического вида, то существуют способы, позволяющие распознать тип этой поверхности и указать каноническую систему координат, т.е. такую, в которой данная поверхность будет иметь каноническое уравнение. В данном курсе эти способы не рассматриваются.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Выясните, какие из векторов образуют пары коллинеарных векторов, если $\mathbf{a} = \{-3, 6, 21\}$, $\mathbf{b} = \{2, -1, 1\}$, $\mathbf{c} = \{1, -2, -7\}$, $\mathbf{d} = \{-6, 3, -3\}$, $\mathbf{e} = \{0, 0, 0\}$.

2. Выясните, является ли тройка векторов компланарной, если $\mathbf{a} = \{5, -1, 3\}$, $\mathbf{b} = \{4, -5, 1\}$, $\mathbf{c} = \{1, 4, 2\}$.

3. Выясните, образуют ли базис в пространстве три вектора: $\mathbf{a} = \{1, -2, 4\}$, $\mathbf{b} = \{3, -1, 5\}$, $\mathbf{c} = \{6, 0, 1\}$.

4. Пусть даны координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\mathbf{a} = \{7, -4, 2\}$, $\mathbf{b} = \{-5, 6, 1\}$. Найдите координаты векторов $\mathbf{c} = 3\mathbf{a}$, $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ и $\mathbf{e} = 9\mathbf{b} - 2\mathbf{d} + \mathbf{c}$.

5. В треугольнике ABC даны координаты вершин: $A(-3, 7, 4)$, $B(1, -5, 0)$; $C(-2, 6, 9)$. Найдите координаты векторов **AB**, **AC** и **CB**.

6. В треугольнике ABC даны координаты вершин: $A(-12, 7, 5)$; $B(-12, 19, 21)$; $C(15, -17, -3)$. Найдите площадь треугольника.

7. Напишите уравнение окружности радиусом $R = 5$, центр которой находится в точке $C(-1, 3)$.

8. Напишите уравнение сферы радиусом $R = 3$, центр которой находится в точке $C(2, -3, 0)$.

9. Напишите уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $A(14, 3, -6)$, $B(1, 1, 1)$, $C(4, -2, -2)$.

10. Найдите канонические уравнения прямой в пространстве, если дано, что эта прямая перпендикулярна плоскости $3x - 2y + 7z - 8 = 0$ и проходит через точку $A(7, -5, 3)$.

11. Уравнение кривой второго порядка $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$ приведите к каноническому виду, определите тип кривой, ее полуоси и фокусы.

12. Определите по уравнениям тип поверхностей второго порядка:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;

г) $x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$;

д) $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 1 = 0$;

е) $x^2 + y^2 - z = 0$;

ж) $x^2 - y^2 - z = 0$;

з) $x^2 - z = 0$.

ГЛАВА 4

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

4.1. Ограниченные и неограниченные последовательности

Пусть задан занумерованный бесконечный набор чисел x_1, x_2, ..., x_n, ... Это значит, что всякому натуральному числу $n = 1, 2, ...$ поставлено в соответствие по определенному закону вещественное число x_n.

Примерами таких наборов являются наборы чисел:

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2}, \ldots, x_n = \frac{1}{n}, \ldots;$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{5}{2}, \ldots, x_n = \frac{n^2+1}{n}, \ldots;$$

$$x_1 = \operatorname{arctg} 1,\ x_2 = \operatorname{arctg} 2,\ \ldots,\ x_n = \operatorname{arctg} n,\ \ldots .$$

Определение 4.1. Всякий занумерованный бесконечный набор чисел x_1, x_2, ..., x_n ... называется *числовой последовательностью.*

Для краткости числовая последовательность обычно обозначается символами x_n, $n = 1, 2, ...$, или $\{x_n\}$ (без указания, что $n = 1, 2, ...$), а x_n называется *общим членом* последовательности.

Введенное понятие числовой последовательности имеет простую геометрическую иллюстрацию. Именно, отметим на вещественной оси $\mathbf{R}^1$ значения x_1, x_2, ... Тогда получим множество точек E, соответствующее данной последовательности (рис. 4.1).

В предыдущих примерах эти множества суть

$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\},\ E = \left\{1, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \ldots\right\},\ E = \{\operatorname{arctg} 1, \operatorname{arctg} 2, \operatorname{arctg} 3, \ldots\}.$$

Очевидно, во всех этих примерах разным значениям $n = 1, 2, ...$ соответствуют разные точки множества E, и поэтому последовательности $\{x_n\}$ можно представить как множество соответствующих точек на прямой $\mathbf{R}^1$. В общем случае это не так. Например, числовая последовательность $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, ...$ принимает на веще-

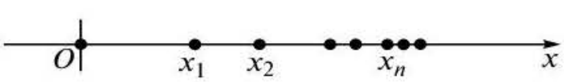


Рис. 4.1

ственной оси только два значения, а именно, $x_n = 1$, когда n четно, и $x_n = -1$, когда n нечетно. Это говорит о том, что каждая из точек $x = 1$ «накрывается» значениями общего члена последовательности x_n бесконечно много раз. Поэтому в данном случае последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ не следует отождествлять ее геометрическим образом на вещественной оси, т. е. с множеством $E = \{-1, 1\}$, состоящим из двух точек.

Тем не менее приведенная геометрическая иллюстрация способствует пониманию различных свойств последовательностей и, в частности, свойства ограниченности.

Определение 4.2. Числовая последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ называется *ограниченной*, если найдется число $M > 0$ такое, что для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство $|x_n| < M$, или, что то же, двустороннее неравенство $-M < x_n < M$.

В соответствии с геометрической иллюстрацией последовательности ее ограниченность означает, что все точки x_n, $n = 1, 2, \ldots$ расположены на некотором отрезке $[-M, M]$ и, следовательно, образуют ограниченное множество.

Пример 4.1. $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ — ограниченная последовательность, так как для всех $n = 1, 2, \ldots$ $|x_n| = \dfrac{1}{n} \le 1$.

Таким образом, в качестве числа $M > 0$, ограничивающего последовательность, можно взять число $M \ge 1$.

Пример 4.2. $x_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Покажем, что и для этой последовательности в качестве числа M можно взять любое число, больше или равное единице. Действительно, при всех n

$$|x_n| = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \le 1,$$

это и требуется.

Может случиться, что вещественное множество $E = \{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$, соответствующее последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots$, является неограниченным. Это значит, что общий член x_n в процессе неограниченного возрастания номера n может принимать по модулю сколь угодно большие значения. Такие последовательности называются неограниченными.

Точно это выражается следующим определением.

Определение 4.3. Последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ называется *неограниченной*, если какое бы большое число $M > 0$ ни взять, всегда найдется номер n такой, что $|x_n| > M$.

Пример 4.3. Установим, что последовательность $x_n = (-1)^n n^2$, $n = 1, 2, \ldots$ неограничена. Действительно, так как $|x_n| = n^2$, то какое бы $M > 0$ ни взять, ясно, что при $n > \sqrt{M}$ выполняется неравенство

$n^2 > M$. Таким образом, в качестве номера n можно взять какое-либо целое число, больше $\sqrt{M}$.

Пример 4.4. Дана последовательность

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ нечетно;} \\ 2^n, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Ясно, что все x_n с нечетными номерами не могут принять значений, больших единицы, сколь бы далекими эти номера ни брать. Напротив, если номера n четны, т.е. $n = 2m$, $m = 1, 2, \ldots$, то для любого выбранного $M > 0$ всегда найдутся достаточно большие номера $n = 2m$, для которых $|x_n| > M$, т.е. $2^n > M$.

Чтобы найти такие номера, достаточно решить неравенство $2^n > M$, или, что то же, неравенство $2^{2m} > M$.

Имеем $2^{2m} \equiv 4^m > M$. Следовательно, логарифмируя это неравенство, находим, что в качестве n можно взять любое четное число $n = 2m$, для которого $m > \log_4 M$.

Тем самым установлено, что последовательность (4.1) неограниченна.

Замечание. Подчеркнем принципиальную разницу между неограниченными последовательностями, данными в примерах 4.3 и 4.4. Именно, если в примере 4.3 неравенство $|x_n| > M$ выполняется сразу для всех номеров n, лишь бы $n > \sqrt{M}$, то в примере 4.4 — только для четных номеров $n > \log_4 M$, т.е. только для части номеров.

Неограниченные последовательности, для которых неравенство $|x_n| > M$ выполняется сплошь для всех n, бóльших некоторого номера, зависящего от M, называются бесконечно большими.

Определение 4.4. Последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ называется *бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ найдется номер N (вообще говоря, зависящий от M) такой, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > M$.

В примере 4.3 неограниченная последовательность $x_n = (-1)^n n^2$, $n = 1, 2, \ldots$ является бесконечно большой, в примере 4.4 — последовательность (4.1) не ограничена, но не является бесконечно большой.

4.2. Бесконечно малые последовательности

Среди всевозможных последовательностей особую роль играют последовательности α_n, $n = 1, 2, \ldots$ которые стремятся к нулю при $n \to \infty$, т.е. в процессе неограниченного возрастания номера общего члена α_n. Такие последовательности называются бесконечно малыми.

Определение 4.5. Числовая последовательность α_n, $n = 1, 2, \ldots$ называется *бесконечно малой*, если она удовлетворяет следующему условию: каково бы ни было сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$, всегда найдется номер N (зависящий от выбранного $\varepsilon > 0$) такой, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Пример 4.5. Последовательность $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ является бесконечно малой. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное сколь угодно малое число. Покажем, что найдется номер N такой, что для всех номеров n, больших N, будет справедливо неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. В нашем случае $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, поэтому номер N должен быть таким, чтобы для всех $n > N$ выполнялось неравенство $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Это возможно, очевидно, если $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Пример 4.6. Последовательность $\alpha_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ также является бесконечно малой. Действительно, так как для любого положительного x справедливо неравенство $\sin x < x$, то, полагая $x = \dfrac{1}{n^2}$, получаем, что $|\alpha_n| = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) < \dfrac{1}{n^2} < \varepsilon$, как только $n > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$. Поэтому в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$, т.е. $N = \left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}\right]$.

Пример 4.7. Рассмотрим последовательность $\alpha_n = q^n$, $n = 1, 2, \ldots$, где $|q| < 1$, и установим, что эта последовательность бесконечно малая. Действительно, взяв $\varepsilon > 0$ сколь угодно малым и логарифмируя неравенство $|\alpha_n| = |q|^n < \varepsilon$ по основанию $|q|$, получаем, что $n > \log_{|q|}\varepsilon$. Таким образом, неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$ будет выполняться для всех $n > \log_{|q|}\varepsilon$. Поэтому можно положить $N = [\log_{|q|}\varepsilon]$ — целая часть $\log_{|q|}\varepsilon$. Это и требуется.

Обратимся к основным свойствам бесконечно малых последовательностей, которые выражаются в следующих теоремах.

Теорема 4.1. Пусть α_n, $n = 1, 2, \ldots$ — бесконечно малая последовательность. Тогда для любого числа M произведение $M\alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$, есть также бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Возможны два случая: $M = 0$ и $M \neq 0$. В первом случае утверждение теоремы очевидно. Рассмотрим случай $M \neq 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное сколь угодно малое положительное число. Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{|M|}$. Поскольку α_n, $n = 1, 2, \ldots$ — бесконечно малая последовательность, то для выбранного ε_1 найдется номер N_1 такой, что для всех номеров $n > N_1$ выполнено неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon_1$. Следовательно, $|M\alpha_n| \leq |M|\,|\alpha_n| < M\varepsilon_1 = M\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ также для всех номеров $n > N$. Это и значит, что последовательность $M\alpha_n$ — бесконечно малая. ▲

Теорема 4.2 (о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную). Пусть α_n, $n = 1, 2, \ldots$ — бесконечно малая последовательность, а x_n, $n = 1, 2, \ldots$ — ограниченная последовательность. Тогда произведение $\alpha_n x_n$, $n = 1, 2, \ldots$ есть бесконечно малая последовательность.

Доказывается аналогично теореме 4.1.

Теорема 4.3. Пусть α_n и β_n, $n = 1, 2, \ldots$ — две бесконечно малые последовательности. Тогда их сумма или разность $\alpha_n \pm \beta_n$ является также бесконечно малой последовательностью.

Доказательство. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ и заметим, что ε_1 также произвольно малое число. Поскольку α_n, $n = 1, 2, \ldots$ — бесконечно малая последовательность, то для выбранного ε_1 найдется номер N_1 такой, что при всех $n > N_1$ будет выполнено неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon_1. \tag{4.2}$$

Точно так же для бесконечно малой последовательности β_n, $n = 1, 2, \ldots$ найдется номер N_2 такой, что при всех $n > N_2$ будет выполнено неравенство

$$|\beta_n| < \varepsilon_1. \tag{4.3}$$

Положим теперь $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для всех n, удовлетворяющих неравенству $n > N$, будут выполнены неравенства (4.2) и (4.3). Следовательно, для всех $n > N$ будет выполнено неравенство

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — любое число, это и значит, что последовательность $\alpha_n \pm \beta_n$ является бесконечно малой. ▲

Следующая теорема гласит о том, что всякая последовательность, «зажатая» между двумя бесконечно малыми последовательностями, является также бесконечно малой.

Теорема 4.4 (о промежуточной бесконечно малой последовательности). Пусть даны три последовательности α_n, x_n и β_n, $n = 1, 2, \ldots$ такие, что:

1) для всех $n = 1, 2, \ldots$ удовлетворяются неравенства $\alpha_n \le x_n \le \beta_n$;

2) α_n и β_n, $n = 1, 2, \ldots$ — бесконечно малые последовательности.

Тогда и промежуточная последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ является бесконечно малой.

Доказательство. При доказательстве теоремы 4.3 было установлено, что если α_n и β_n — две бесконечно малые последовательности, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при всех номерах $n > N$ одновременно выполняются неравенства

$$|\alpha_n| < \varepsilon,\ |\beta_n| < \varepsilon,$$

или, что то же,

$$\underline{-\varepsilon < \alpha_n} < \varepsilon, \ -\varepsilon < \underline{\beta_n < \varepsilon.} \tag{4.4}$$

Учитывая подчеркнутые неравенства в (4.4), из условия 1 немедленно получаем, что для тех же номеров $n > N$ все члены промежуточной последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют двусторонним неравенствам

$$-\varepsilon < \alpha_n \leq x_n \leq \beta_n < \varepsilon.$$

Отсюда, очевидно, следует, что при $n > N$

$$-\varepsilon < x_n < \varepsilon, \text{ т.е. } |x_n| < \varepsilon.$$

Это и значит, что x_n, $n = 1, 2, \ldots$ — бесконечно малая последовательность. ▲

Пример 4.8. В качестве примера рассмотрим частный случай теоремы, часто встречающийся на практике. Именно, пусть $x_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность неотрицательных чисел (коротко — неотрицательная последовательность). Допустим, что эта неотрицательная последовательность не превосходит какой-либо бесконечно малой последовательности β_n, $n = 1, 2, \ldots$, т.е. для всех n

$$0 \leq x_n \leq \beta_n. \tag{4.5}$$

Мы утверждаем, что тогда последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, сама является бесконечно малой.

Это утверждение немедленно следует из теоремы 4.4. В самом деле, последовательность x_n, удовлетворяющая неравенствам (4.4), может трактоваться как промежуточная последовательность между тривиальной последовательностью $\alpha_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ и последовательностью α_n, $n = 1, 2, \ldots$, и нам остается только применить теорему 4.4.

Наконец, установим связь между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями.

Теорема 4.5. Пусть x_n, $n = 1, 2, \ldots$ — бесконечно большая последовательность. Тогда последовательность обратных величин $\alpha_n = \dfrac{1}{x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ является бесконечно малой последовательностью.

И обратно, если α_n, $n = 1, 2, \ldots$ — бесконечно малая последовательность, причем $\alpha_n \neq 0$, то последовательность $x_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ является бесконечно большой.

Доказательство. Действительно, пусть x_n — бесконечно большая последовательность. Покажем, что в этом случае последовательность $\alpha_n = \dfrac{1}{x_n}, n = 1, 2, \ldots$ есть бесконечно малая последовательность. Для этого выберем любое $\varepsilon > 0$ и положим $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда в соответствии с определением 4.4 найдется номер N такой, что при $n > N$ справедливо неравенство

$$|x_n| > M.$$

Тогда при тех же номерах $n > N$ будем иметь $|\alpha_n| \equiv \dfrac{1}{|x_n|} < \dfrac{1}{M} = \varepsilon$.

Это означает, что α_n — бесконечно малая последовательность.

Докажем обратное утверждение. Пусть последовательность α_n, $n = 1, 2, ...$ — бесконечно мала. Докажем, что последовательность $x_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$, $n = 1, 2, ...$ бесконечно велика. Действительно, пусть $M > 0$ — сколь угодно большое число. Положим $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$ и найдем номер N такой, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ для всех $n > N$. Но тогда при тех же $n > N$ будем иметь

$$|x_n| \equiv \frac{1}{|\alpha_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = M \text{ , т.е. } |x_n| > M. \blacktriangle$$

4.3. Предел числовой последовательности

Данный подраздел является основным в этой главе. Здесь вводится понятие предела последовательности и изучаются сходящиеся последовательности.

4.3.1. Основные определения

Определение 4.6. Число a называется *пределом* числовой последовательности x_n, $n = 1, 2, ...$, если разность $\alpha_n = x_n - a$ является бесконечно малой последовательностью.

Обозначается предел символом $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Последовательности, имеющие предел, называются *сходящимися*. Факт сходимости последовательности x_n, $n = 1, 2, ...$ к своему пределу a принято обозначать так: $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Используя определение 4.5 бесконечно малой последовательности, нетрудно сформулировать понятие предела на так называемом «$\varepsilon - N$» языке.

Определение 4.7. Число a называется *пределом* последовательности x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N (зависящий, вообще говоря, от ε) такой, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Пример 4.9. Прежде всего заметим, что в рамках определения 4.6 бесконечно малые последовательности — это те и только те последовательности, предел которых равен нулю. Таким образом, сказать, что α_n, $n = 1, 2, \ldots$ — бесконечно малая последовательность или сказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ — одно и то же.

Пример 4.10. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1.$

Действительно,

$$x_n \equiv \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1,$$

поскольку $\dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$.

Пример 4.11. Вычислим сумму всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$, где $|q| < 1$. Именно, пусть $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — последовательность сумм первых n слагаемых.

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}.$

Действительно, как известно

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1},$$

и, следовательно,

$$S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{q^{n+1}}{q-1} - \frac{1}{q-1},$$

или, иначе

$$S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1}{1-q} + \frac{q}{q-1} q^n. \qquad (4.6)$$

Поскольку $|q| < 1$, то последовательность $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ (см. пример 4.7), т.е. является бесконечно малой. По теореме 4.1 последовательность $\dfrac{q}{q-1} q^n$ также является бесконечно малой, и из (4.6) получаем, что последовательность S_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ сходится к числу $\dfrac{1}{1-q}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$. Найденный предел и принимается в качестве суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, т.е.

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Выясним геометрический смысл предела последовательности.

Как известно, совокупность всех точек $x \in \mathbf{R}^1$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \varepsilon$, является интервалом радиусом ε с центром в точке $x = a$. Такой интервал называется ε-окрестностью точки a и

Аксиомы умножения

На множестве $\mathbf{R}^1$ определена операция умножения, когда каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из $\mathbf{R}^1$ ставится в соответствие некоторый элемент $xy \in \mathbf{R}^1$, называемый *произведением* x и y. При этом выполнены следующие условия:

1) существует *нейтральный элемент* 1 (называемый *единицей*) такой, что для любого элемента $x \in \mathbf{R}^1$ выполняется равенство $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;

2) для любого элемента $x \in \{\mathbf{R}^1 \setminus 0\}$ найдется в $\{\mathbf{R}^1 \setminus 0\}$ элемент x^{-1} (называемый *обратным* к x) такой, что $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$;

3) операция умножения *коммутативна*, что означает, что для любых элементов x и y из $\mathbf{R}^1$ выполняется равенство $xy = yx$;

4) операция умножения *ассоциативна*, что означает, что для любых элементов x, y и z из $\mathbf{R}^1$ выполняется равенство $(xy)z = x(yz)$;

5) операция умножения *дистрибутивна* по отношению к операции сложения, что означает, что для любых элементов x, y и z из $\mathbf{R}^1$ выполняется равенство $(x + y)z = xz + yz$.

Аксиомы порядка

Для любых двух элементов x, y из $\mathbf{R}^1$ установлено, выполняется соотношение $x \le y$ или нет. При этом выполняются условия:

1) для любого x из $\mathbf{R}^1$ $x \le x$;

2) если $x \le y$ и $y \le x$, то $x = y$;

3) если $x \le y$ и $y \le z$, то $x \le z$;

4) для любых x и y из $\mathbf{R}^1$ либо $x \le y$, либо $y \le x$;

5) для любых элементов x, y и z из $\mathbf{R}^1$ справедливо утверждение: если $x \le y$, то $x + z \le y + z$;

6) для любых элементов x и y из $\mathbf{R}^1$ справедливо утверждение: если $0 \le x$ и $0 \le y$, то $0 \le xy$.

Аксиома полноты

Если E и Y — два непустых числовых множества, обладающих тем свойством, что для любых x из E и y из Y справедливо соотношение $x \le y$, то существует $\beta \in \mathbf{R}^1$ такое, что для любых двух элементов x из E и y из Y справедливо соотношение $x \le \beta \le y$.

Замечание. Если для любых $x \in E$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $x \le y$, то говорят, что $E \le Y$. Аксиома полноты требует, чтобы для любой пары множеств E и Y, т.е. таких, что $E \le Y$, существовало бы действительное число β такое, что для любых $x \in E$ и $y \in Y$ выполнялись бы неравенства $x \le \beta \le y$.

Приведенная система аксиом, являясь непротиворечивой, однозначно определяет такой математический объект, как действительное число. Из аксиом могут быть выведены все алгебраические свойства чисел, а также свойства их непрерывности (между любыми двумя числами всегда есть другие числа).

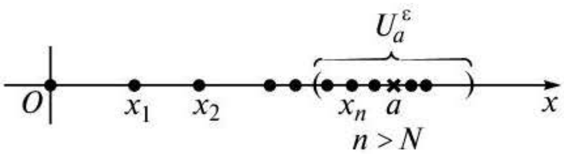


Рис. 4.2

обозначается U_a^ε. Следовательно, фигурирующее в определении 4.6 неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, $n > N$, геометрически выражает тот факт, что для всех номеров, начиная с номера $N + 1$, члены последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots$ попадают в ε-окрестность точки $x = a$.

В итоге в геометрической интерпретации определение предела $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ выглядит следующим образом: число a является пределом последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots$, если сколь бы малую окрестность U_a^ε ни взять, всегда найдется номер N такой, что все члены x_n с номерами большими, чем N, попадают в эту ε-окрестность точки a, т.е. $x_n \in U_a^\varepsilon$, $n > N$. Вне же окрестности U_a^ε остается не более чем конечное множество элементов последовательности (рис. 4.2).

С уменьшением $\varepsilon > 0$ номер N становится, вообще говоря, все больше и больше, однако всякий раз весь «хвост» $x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$ последовательности $x_1, x_2, \ldots$ попадает в выбранную окрестность U_a^ε предельной точки a.

4.3.2. Свойства сходящихся последовательностей

Нижеследующие теоремы составляют основу для практического нахождения пределов числовых последовательностей.

Прежде всего отметим так называемые «арифметические» свойства пределов. Эти свойства заключены в следующей теореме.

Теорема 4.6. Пусть x_n и y_n, $n = 1, 2, \ldots$ — сходящиеся последовательности, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,,\ \ \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для любого числа M последовательность Mx_n также сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty}(Mx_n) = M\lim_{n\to\infty} x_n = Ma;$$

2) сумма (разность) $x_n \pm y_n$ также сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b;$$

3) произведение $x_n y_n$ также сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x \lim_{n\to\infty} y_n = ab;$$

4) при дополнительном условии $b \neq 0$ частное $\dfrac{x_n}{y_n}$ также сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{a}{b}.$$

Доказательство. Все четыре утверждения доказываются однотипно, поэтому дадим строгое доказательство, например, для произведения последовательностей, т.е. для утверждения 3.

Действительно, в соответствии с определением предела последовательности x_n и y_n представляются в виде $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где α_n и β_n — бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$x_n y_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = ab + \gamma_n, \tag{4.7}$$

где

$$\gamma_n = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

Так как a и b — числа, то произведения $a\beta_n$ и $b\alpha_n$ суть бесконечно малые последовательности (см. теорему 4.1). Произведение же двух бесконечно малых последовательностей тем более является бесконечно малой. Таким образом, γ_n также является бесконечно малой последовательностью и запись (4.7) по определению предела означает, что ab есть предел последовательности $x_n y_n$. ▲

Как уже отмечалось, эти свойства являются основным инструментом нахождения конкретных пределов. Рассмотрим несколько примеров использования теоремы 4.6.

Пример 4.12. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n-1}{3n^2}$.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n-1}{3n^2}=(\textit{утверждение } 1)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n-1}{n^2}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=(\textit{утверждение } 2)=\frac{1}{3}\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{3}(1-0-0)=\frac{1}{3}.$$

Пример 4.13. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}n\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)}=1,$$

так как $\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\to 1$ и $\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}\to 1$ при $n\to\infty$.

Замечание. Отметим, что непосредственное (т.е. без предварительных преобразований) применение теоремы 4.6 ни в первом (см. пример 4.12), ни во втором (см. пример 4.13) случае невозможно, поскольку это приводит к неопределенностям. Неопределенности бывают разных типов, их условно можно представить в виде $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$. Ниже познакомимся с одной неопределенностью типа 1^∞ (неопределенность типа «е»). Раскрытие этих неопределенностей и составляет содержание практики нахождения пределов.

Следующий вопрос, который рассмотрим, касается предельного перехода в неравенствах.

Теорема 4.7 (теорема о пределе промежуточной последовательности). Пусть имеются три последовательности x_n, y_n и z_n, $n = 1, 2, \dots$, причем:

1) $x_n \le y_n \le z_n$, $n = 1, 2, \dots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Тогда промежуточная последовательность y_n также сходится, причем к тому же пределу a, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство. Из условия 2 следует, что x_n и y_n представляются в виде $x_n = a + \alpha_n$, $z_n = a + \beta_n$, где α_n, β_n, $n = 1, 2, \dots$ — бесконечно малые последовательности. В таком случае неравенства 1 суть

$$a + \alpha_n \le x_n \le a + \beta_n,$$

или, иначе

$$\alpha_n \le x_n - a \le \beta_n, \ n = 1, 2, \dots .$$

Следовательно, согласно теореме 4.4, разность $x_n - a \to 0$ при $n \to \infty$. ▲

Заключительная теорема указывает на то, что в числовых неравенствах можно переходить к пределу, при этом предельное неравенство имеет тот же знак.

Теорема 4.8. Пусть x_n, y_n, $n = 1, 2, \dots$ — сходящиеся последовательности, причем

$$x_n \le y_n. \tag{4.8}$$

Тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Необходимо установить, что $a \le b$. Допустим противное, т.е. $a > b$, или, что то же, $a - b = \varepsilon_0 > 0$, $n = 1, 2, \dots$.

Имеем $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n, $n = 1, 2, \dots$ — бесконечно малые последовательности. В силу (4.8),

$$a + \alpha_n \le b + \beta_n, \ n = 1, 2, \dots,$$

откуда

$$a - b \le \alpha_n - \beta_n,$$

или, что то же,

$$\alpha_n - \beta_n \ge \varepsilon_0, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Но это несовместимо с тем, что α_n и β_n — бесконечно малые последовательности, а значит, и разность $\beta_n - \alpha_n$ также бесконечно малая последовательность (см. теорему 4.3). Полученное противоречие доказывает теорему. ▲

4.4. Монотонные последовательности. Число «е»

Пусть x_n, $n = 1, 2, \ldots$ — числовая последовательность. По определению, она монотонно возрастающая, если для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $x_n \le x_{n+1}$.

В случае строгого неравенства $x_n < x_{n+1}$ последовательность называется строго монотонно возрастающей.

Примерами монотонно возрастающих последовательностей являются последовательности $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $x_n = \operatorname{arctg} n$, $x_n = n^2$ и т.д.

Интересно отметить, что в первых двух случаях последовательности сходятся, а именно

$$1 - \frac{1}{n} \to 1, \; \operatorname{arctg} n \to \frac{\pi}{2} \; \text{при } n \to \infty.$$

В то же время последовательность $x_n = n^2$ конечного предела, очевидно, не имеет. И это не случайно. Дело в том, что последовательности $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ и $x_n = \operatorname{arctg} n$ ограничены, а последовательность $x_n = n^2$ — нет.

Общий результат о сходимости монотонно возрастающей последовательности устанавливается в следующей теореме.

Теорема 4.9. Всякая монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет конечный предел.

Доказательство. Действительно, пусть последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет условиям теоремы, т.е.

1) $x_n \le x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$;

2) существует число M такое, что для всех n справедлива оценка $x_n \le M$.

Покажем, что существует число a такое, что $x_n \to a$.

Для этого рассмотрим множество значений последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и обозначим его через E. В соответствии с условием 2 множество E ограничено сверху некоторым числом M. Поэтому, как всякое ограниченное множество, оно имеет точную верхнюю грань $a = \sup E$. Покажем, что это число и есть искомый предел последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots$.

В самом деле, в соответствии с определением точной верхней грани множества, число a обладает двумя свойствами:

1) $x_n \le a$ для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$;

2) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется номер N такой, что $x_N > a - \varepsilon$.

Ясно, что ввиду монотонности последовательности из свойства 2 следует, что при любом $n = N + 1, N + 2, \ldots$ тем более $x_n > a - \varepsilon$.

С учетом свойства 1, это дает двустороннее неравенство

$$a - \varepsilon < x_n \le a,\ n = N + 1,\ N + 2, \ldots$$

и, как следствие, неравенство

$$a - \varepsilon < x_n \le a + \varepsilon,\ n = N + 1,\ N + 2, \ldots .$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер N, начиная с которого $|x_n - a| < \varepsilon$. Это и значит, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. ▲

Примером использования доказанной теоремы является строгое введение одного из самых известных и важных иррациональных чисел, а именно числа $e \approx 2{,}718281828\ldots$.

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ и покажем, что она имеет конечный предел, который по определению и есть число e.

Для этого установим, во-первых, что последовательность x_n монотонна.

Утверждение 4.1. Последовательность $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ монотонно возрастает.

Доказательство. Согласно формуле бинома Ньютона,

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}$$

или после преобразования

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} = 1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

то же самое, что

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \tag{4.9}$$

Ясно, что при замене n на $n + 1$ значение каждой скобки увеличится, ибо из единицы будут вычитаться вместо чисел $\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{k-1}{n}$ меньшие числа $\dfrac{1}{n+1}, \ldots, \dfrac{k-1}{n+1}$.

Кроме того, и число слагаемых станет больше на единицу. Таким образом, для любого n имеем $x_n < x_{n+1}$. ▲

Утверждение 4.2. Последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ ограничена сверху числом $M = 3$.

Доказательство. Обратимся вновь к формуле (4.9). Заменив в ней каждую скобку единицей, получим оценку сверху

$$x_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

и тем более оценку $x_n \le 1 + S$, где S — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{2}$. Так как $S = \dfrac{1}{1-q}$, то $S = 2$, и тем самым $x_n < 3$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. ▲

В результате приходим к следующему выводу. Последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ удовлетворяет условиям теоремы 4.9 и, следовательно, имеет предел. Этот предел и есть по определению число e. Тем самым мы установили один из так называемых замечательных пределов

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Вычисления показывают, что $\mathrm{e} \approx 2{,}718281828\ldots$.

Отметим также, что число e является основанием логарифма, получившего название «натурального логарифма». Натуральные логарифмы наиболее часто употребляются на практике.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность ограничена.

2. Назовем последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, ограниченной сверху, если найдется число M такое, что для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $x_n \le M$.

Аналогично назовем последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, ограниченной снизу, если найдется число m такое, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $m \le x_n$.

Докажите, что последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена (см. определение 4.2) тогда и только тогда, когда она ограничена сверху и снизу одновременно.

3. Докажите, что последовательность

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n} & \text{при } n \text{ четном,} \\ n^2 & \text{при } n \text{ нечетном} \end{cases}$$

ограничена снизу, но не ограничена сверху.

4. Пусть последовательность $x_n = 1, 2, \ldots$ сходится к числу a, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что тогда последовательность $y_n = |x_n|$, $n = 1, 2, \ldots$ сходится к $|a|$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

5. Пусть x_n, $n = 1, 2, \ldots$ — числовая последовательность. Рассмотрим произвольный бесконечный набор возрастающих номеров $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Тогда последовательность чисел $y_1 = x_{n_1}, y_2 = x_{n_2}, \ldots, y_k = x_{n_k}, \ldots$ называется подпоследовательностью исходной последовательности x_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Докажите, что если последовательность x_n сходится, то любая ее подпоследовательность также сходится, причем к тому же самому пределу. Иначе, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то и $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = a$.

6. Вычислите следующие пределы:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2+n)^2+n^2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n+1},\quad \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n-1}-n),\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}.$$

ГЛАВА 5

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

5.1. Определение функции

Пусть X — некоторое множество вещественных чисел. Допустим, что каждому значению $x \in X$ по какому-либо закону поставлено в соответствие вещественное число y. Это сопоставление определяет однозначное отображение и называется *функцией* одной вещественной переменной x с областью определения X. Множество всех значений y обозначается через Y и называется *областью значений* этой функции.

Общепринято функции обозначать буквой f, а более точно $y = f(x)$, подчеркивая, что значение $y \in Y$ определяется по значению $x \in X$. При этом переменная величина x называется *аргументом*.

Заметим, что закон, определяющий функцию $y = f(x)$, может задаваться различными способами, в том числе словесно, таблицей значений и т.д. Но чаще всего функция $y = f(x)$ задается какой-либо формулой, т.е. аналитически, поскольку этот вид записи наиболее удобен для исследования различных свойств функции.

Пример 5.1. Простейшими функциями, определенными на всей вещественной оси, являются многочлены степени $n \geq 1$

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 — коэффициенты многочлена.

Многочлены первой степени $y = a_1 x + a_0$ являются линейными функциями, их графики — прямые.

Многочлены второй степени $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ являются квадратными трехчленами, их графики — различного вида параболы.

Пример 5.2. Важнейшими элементарными функциями являются тригонометрические функции

$$y = \sin x, \; y = \cos x$$

и обратные к ним функции

$$y = \arcsin x, \; y = \arccos x.$$

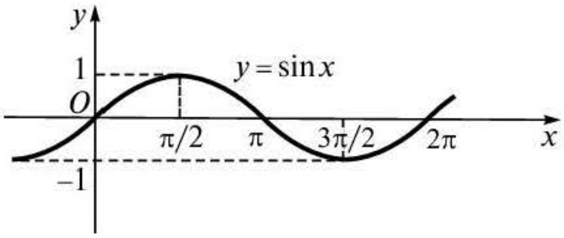


Рис. 5.1

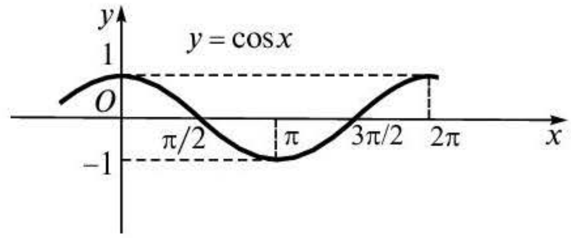


Рис. 5.2

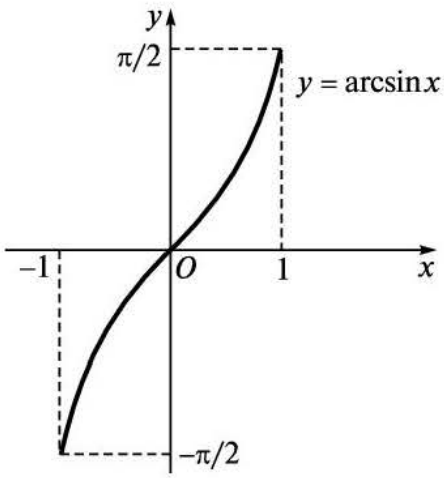


Рис. 5.3

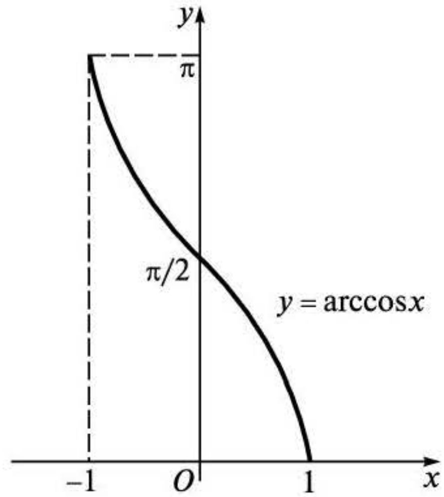


Рис. 5.4

Функции $\sin x$ и $\cos x$ являются периодическими функциями с периодом 2π и определены на всей вещественной оси (рис. 5.1, 5.2). Напротив, функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ определены только на отрезке $[-1, 1]$ (рис. 5.3, 5.4).

Пример 5.3. Показательная и логарифмическая функции также относятся к элементарным функциям

$$y = a^x \text{ и } y = \log_a x,$$

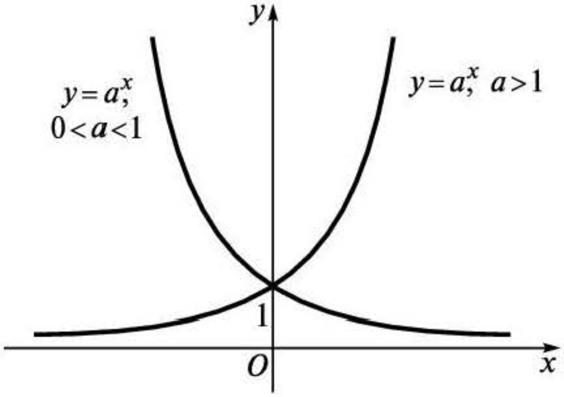


Рис. 5.5

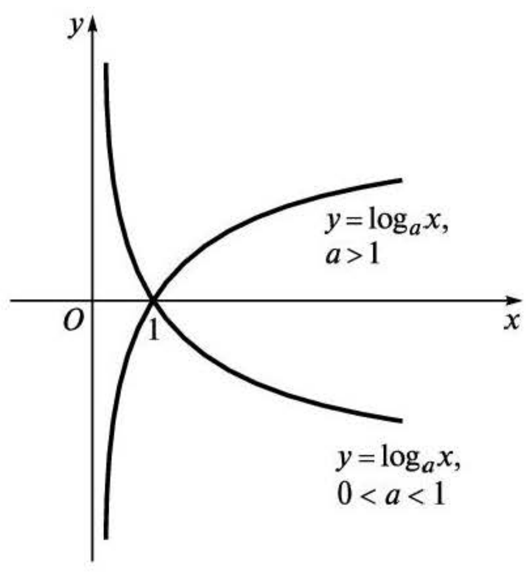


Рис. 5.6

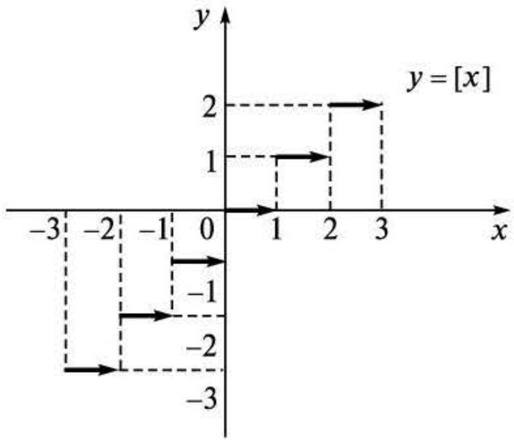


Рис. 5.7

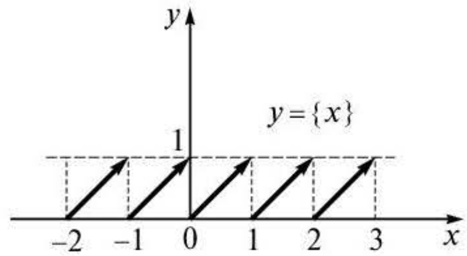


Рис. 5.8

$a > 0$, $a \neq 1$ — фиксированное число. Показательная функция $y = a^x$ определена для всех $x \in \mathbf{R}^1$ и принимает только положительные значения (рис. 5.5). Напротив, логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена только для $x > 0$, но принимает всевозможные значения, как положительные, так и отрицательные (рис. 5.6).

Пример 5.4. Определим две функции, не являющиеся элементарными, а именно функцию $y = [x]$, называемую целой частью вещественного числа x, и функцию $y = \{x\}$, называемую дробной частью числа x.

Как известно, любое вещественное число x однозначно представляется в виде $x = n + \alpha$, где n — целое число, а число α удовлетворяет неравенству $0 \leq \alpha < 1$. По определению полагаем $[x] = n$, $\{x\} = \alpha$. Ясно, что числа n и α зависят от x и являются функциями, определенными на всей вещественной оси (рис. 5.7, 5.8).

5.2. Предел функции

5.2.1. Определение. Таблица замечательных пределов

Нижеследующее определение предела является центральным определением в теории функций одной вещественной переменной, оно характеризует поведение функции $y = f(x)$ в процессе стремления ее аргумента x к фиксированной точке $a \in \mathbf{R}^1$.

Итак, пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности какой-либо фиксированной точки a, исключая, быть может, только саму точку a.

Определение 5.1. Число b называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности аргументов x_1, x_2, ..., x_n, ... $(x_n \neq a)$, сходящейся к a, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, ... сходится к b.

Предел функции обозначают символом $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и пишут